Zur Lusternik-Schnirelmann-Kategorie Euklidischer Konfigurationsräume

Diplomarbeit

angefertigt am
Mathematischen Institut
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von
Fridolin Roth
aus München

Juni 2005

Betreuer: Prof. Dr. Carl-Friedrich Bödigheimer

Abstract

We calculate the Lusternik-Schnirelmann-Category of the n-th ordered configuration spaces $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)$ of $\mathbb{R}^m$ and give bounds for the category of the corresponding unordered configuration spaces $C^n(\mathbb{R}^m)$. In many cases, e.g. if n is a power of 2, we determine $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m))$ precisely.

Most of this paper is written in german, but there is an english summary containing the main results and sketches of the proofs.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Lusternik-Schnirelmann-Kategorie eines topologischen Raumes X, kurz Kategorie von X oder $\mathrm{cat}(X)$, ist um 1 niedriger als die minimale Anzahl offener, in X zusammenziehbarer Mengen, die benötigt werden, um X zu überdecken, siehe Definition 1.1. Diese Definition ist einfach, aber immer wieder wird bemerkt, wie schwierig es oft sei, die Kategorie eines Raumes zu berechnen. Ein Beispiel hierfür ist Ganeas Vermutung, dass $\mathrm{cat}(X \times \mathbb{S}^1) = \mathrm{cat}(X) + 1$ gilt ([Gan71]). Diese Vermutung war über Jahrzehnte hinweg offen und wurde erst vor einigen Jahren durch Iwase widerlegt ([Iwa98]). Nicht zuletzt aufgrund dieses Durchbruchs gab es in letzter Zeit eine Fülle neuer Veröffentlichungen, die die Lusternik-Schnirelmann-Theorie erneut zu einem blühenden Feld aktueller Forschung gemacht haben.

Dass nicht alles ganz so simpel ist, wie es auf den ersten Blick erscheint, zeigt sich auch an so mancher Umformulierung dessen, was wir uns unter der Kategorie eines Raumes vorstellen können. Dies führt uns schnell zu Konzepten der Homotopietheorie. Während obere Schranken für die Kategorie eines Raumes verständlicherweise von konstruktiver Natur sind, lässt sie sich von unten – auch verständlicherweise – durch algebraische Größen beschränken. Die folgenden Berechnungen sind hierfür gute Beispiele.

In dieser Arbeit fasse ich mein Wissen über die Lusternik-Schnirelmann-Kategorie der geordneten und ungeordneten Konfigurationsräume $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)$ und $C^n(\mathbb{R}^m)$ euklidischer Räume zusammen. Die meisten Ergebnisse habe ich ab Seite 6 zusammengefasst. Im geordneten Fall konnte ich die Kategorie vollständig bestimmen (Theorem A, Seite 6 und 40). Im ungeordneten Fall kenne ich die Kategorie nicht für alle Werte von n und m. In allen Fällen, in denen sie genau bestimmt ist, gilt aber $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) = (n-1)\cdot(m-1)$. Das lässt auf eine einfache Formulierung eines allgemeinen Ergebnisses hoffen. Jedenfalls ist der Wert $(n-1)\cdot(m-1)$ stets eine obere Schranke, und auch eine allgemeingültige untere Schranke kann ich angeben. Über den aktuellen Stand der Forschung konnte ich auch mit Fred Cohen, Yves Félix, Sadok Kallel und Daniel Tanré sprechen und wage deshalb zu vermuten, dass es derzeit wohl keine wesentlich ausführlicheren Antworten auf die noch offenen Fragen gibt. Hauptziel der Arbeit ist

der Beweis von Theorem B (Seite 6 bzw. Seite 41), in dem die wesentlichen Ergebnisse zur Kategorie der ungeordneten euklidischen Konfigurationsräume zusammengefasst sind.
Erste Ergebnisse über die Kategorie von ungeordneten Konfigurationsräumen der euklidischen Ebene hat Vassiliev bei der Untersuchung der Komplexität von Algorithmen gefunden, allerdings ohne seine Ergebnisse so zu formulieren. Aus [Vas88] folgt aber leicht, dass für jede Primzahl p und die Anzahl $D_p(n)$ der Koeffizienten in der p-adischen Darstellung von n die Abschätzung $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^2)) \geq n - D_p(n)$ gilt. Einige von Vassilievs Ergebnissen lassen sich allgemeiner verwenden und gehen auch wesentlich in meine Berechnungen für $m > 2$ ein, siehe auch hierzu die Zusammenfassung auf den folgenden Seiten.

Die ersten zwei Kapitel dieser Arbeit sind Vorbereitung, sodass in Kapitel 3 die Ergebnisse relativ schnell gefolgert werden können. Es liegt in der Natur des Inhalts, dass Abschnitt 3.4 relativ skizzenhaft ist, ebenso wie die Abschnitte des Kapitels 4, die für eine gründlichere Behandlung Vorbereitungen bräuchten, die mit dem eigentlichen Thema wenig zu tun haben.

Danksagungen:

Ich danke meinen Mitstudenten und Freunden Johannes Ebert, Christoph Bergbauer, Marìa Castillo, Ulrich Denker, Philipp Reinhard, und Juan Wang für die vielen kleineren und größeren Diskussionen, die sich beim gemeinsamen Studieren und darüber hinaus ergeben haben. Prof. Birgit Richter danke ich für ihre kritischen Blicke auf das Manuskript. Jean-Philippe Jourdan hat mich auf Doeraenes Arbeit [Dor98] und den Beweis von Lemma 1.11 nach [Sel97] hingewiesen. Prof. Daniel Tanré und Prof. Fred Cohen danke ich für ihre Kommentare, vor allem denen zum aktuellen Stand der Wissenschaft. Vor allem aber danke ich Herrn Prof. Bödigheimer für seine Themenvorschläge und mannigfachen Anregungen, die Betreuung bei der Anfertigung dieser Arbeit und die Einladung nach Lille, wo ich Prof. Yves Felix und Prof. Daniel Tanré treffen konnte. Nicht zuletzt danke ich ihm dafür, wie er die Begeisterung für die Topologie in mir gestärkt hat.

Summary

We investigate the Lusternik-Schnirelmann-Category cat of the n-th ordered and unordered configuration spaces $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)$ respectively $C^n(\mathbb{R}^m)$ of $\mathbb{R}^m$ and obtain

Theorem A
For all $m \geq 2$, i.e. as long as $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)$ is connected,

$$\mathrm{cat}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)) = n - 1 \tag{1}$$

holds. The space $\widetilde{C}^n(\mathbb{R})$ consists of $n!$ contractible components, hence $\mathrm{cat}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R})) = n! - 1$.

In the unordered case, we obtain

Theorem B
Let k_n be the number of 1's in the dyadic expansion of n. Then we have

$$(n - k_n) \cdot (m - 1) \leq \mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) \leq (n - 1) \cdot (m - 1). \tag{2}$$

If (i) n is a power of two or $n = 3$
or (ii) n is a prime and m is odd
or (iii) $m \leq 2$,
we have

$$\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) = (n - 1) \cdot (m - 1). \tag{3}$$

If $n = p$ is a prime and m is even, then we also have

$$\mathrm{cat}(C^p(\mathbb{R}^m)) \geq (p - 1) \cdot (m - 2). \tag{4}$$

To derive theorem A for $m \geq 2$, we bound $\mathrm{cat}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m))$ from below by the integral cup-length (Folgerung 2.2) and from above by a standard argument (Satz 1.13), using that there is an $(m-2)$-connected $(n-1) \cdot (m-1)$-dimensional CW-model for $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)$. As the lower bound, this model is obtained through (co-)homological input due to Fred Cohen.

The lower bound for $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m))$ in (2) is in fact a lower bound for the sectional category of the covering $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m) \to C^n(\mathbb{R}^m)$. It is obtained by finding a class of category weight $(n-k_n)\cdot(m-1)$ in the cohomology of $C^n(\mathbb{R}^m)$ with $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-coefficients. The existence of such a class follows from Vassiliev's observation, that the obvious morphism $H^*(\Sigma_n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^*(C^n(\mathbb{R}^m);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ is surjective (see [Vas92] or Satz 2.8 in this paper) and the determination of the cohomological dimension $\mathrm{cohdim}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ of the unordered configuration space $C^n(\mathbb{R}^m)$ (Satz 2.9). All this follows by examination of Vassiliev's CW-composition of the one-point-compactification $C^n(\mathbb{R}^m)_\infty$ of $C^n(\mathbb{R}^m)$. The sharpenings of this lower bound in theorem B in case when $n=p$ is a prime and m is odd is due to an analogous observation when we replace $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$- by $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-coefficients. Here again, we use results due to Fred Cohen ([Coh73] and [CLM76]), which were proved anew by Erich Ossa [Oss96]. For $n=p=3$ this sharpening can be generalized to even m using $\mathrm{cat}(C^3(\mathbb{R}^{m+1})) \leq \mathrm{cat}(C^3(\mathbb{R}^m))+2$ (Lemma 3.11).

The upper bound in (2) is also derived from Vassiliev's CW-model, when we apply the following proposition (see Satz 1.14), which we could not find in literature:

Proposition C
Let X be an n-dimensional CW-Complex such that $X-X^{(k-1)}$ is path-connected, where $X^{(r)}$ denotes the r-skeleton of X. Then we have

$$\mathrm{cat}(X-X^{(k-1)}) \leq n-k. \tag{5}$$

As a further improvement of theorem B, we prove that

$$\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) \geq \mathrm{cat}(C^{n-1}(\mathbb{R}^m)).$$

This can be regarded as a corollary of the next proposition.

Proposition D
If $n=n_1+\cdots+n_l$, then we have the inequality

$$\mathrm{cat}\left(C^n(\mathbb{R}^m)\right) \geq \mathrm{cat}\left(C^{n_1}(\mathbb{R}^m)\times\cdots\times C^{n_l}(\mathbb{R}^m)\right). \tag{6}$$

Kapitel 1

Lusternik-Schnirelmann-Kategorie

In diesem Abschnitt stelle ich Grundlagen zur Lusternik-Schnirelmann-Kategorie zusammen, die für die weitere Arbeit wichtig sind. Man kann die Kategorie eines Raumes X bei schwachen Voraussetzungen auf unterschiedliche Arten betrachten. Dies spiegelt sich in den nachfolgenden Definitionen wider. Sie sind alle gleichwertig, wenn X ein zusammenhängender CW-Komplex ist.
Nach den Definitionen nenne ich wichtige Sätze, die später angewendet werden oder für das Verständnis hilfreich sind. Meine Hauptquelle für diesen Abschnitt ist das Buch von Cornea, Lupton, Oprea und Tanré [CLOT03]. Die Idee zu Satz 1.14, hatte ich bei der Betrachtung der Einpunkt-Kompaktifizierung $C^n(\mathbb{R}^m)_\infty$ des ungeordneten Konfigurationsraumes $C^n(\mathbb{R}^m)$. Der Satz liefert mit Vassilievs Arbeit [Vas88] oder [Vas92] direkt eine obere Schranke für $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m))$. Ich habe ihn wegen der allgemein gehaltenen Formulierung in diesen Abschnitt aufgenommen.

1.1 Definition nach Lusternik und Schnirelmann

Die Geburtsstunde der Lusternik-Schnirelmann-Theorie liegt gut 70 Jahre zurück, siehe [LS34]. Den Anstoß dazu gab die Untersuchung einer Morse-Funktion f und die Betrachtung einer unteren Schranke für die Anzahl ihrer kritischen Punkte, die „Kategorie" genannt wurde. Im Laufe der Jahre gab es viele leicht variierende Definitionen. Ich halte mich mit der folgenden an [CLOT03].

Definition 1.1 (kategorische Überdeckung, LS-Kategorie)
Eine endliche offene Überdeckung $\{U_i\}$ eines Raumes X nennen wir kategorisch, *wenn jedes Element der Überdeckung zusammenziehbar in X (sic!) ist. Ist $n+1$ die minimale Länge einer solchen kategorischen Überdeckung, dann ist n die* Lusternik-Schnirelmann-Kategorie *von X, geschrieben $\mathrm{cat}(X) = n$. Hat X keine solche Überdeckung, so sagen wir $\mathrm{cat}(X) = \infty$.*

In der Literatur gibt es im obigen Fall auch die Definition $\operatorname{cat}(X) = n+1$ (ohne shift). Mit obiger Definition gilt $\operatorname{cat}(\emptyset) = -1$, und $\operatorname{cat}(X) = 0$ gilt genau dann, wenn X zusammenziehbar ist. Anders ausgedrückt heißt $\operatorname{cat}(X) = n$, dass X von $n+1$ Punkten „homotopie-überdeckt" wird, aber nicht von n.
Die kategorischen Mengen müssen nicht zusammenhängend sein, wie folgendes einfache Beispiel zeigt:

Beispiel 1.2 ($\operatorname{cat}(\mathbb{S}^m)$)
Für jede Einheitssphäre $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ gilt $\operatorname{cat}(\mathbb{S}^m) = 1$: Da $\mathbb{S}^m$ nicht zusammenziehbar ist, gilt $\operatorname{cat}(\mathbb{S}^m) \geq 1$. Andererseits können wir $\mathbb{S}^m$ mit den offenen Mengen ($\mathbb{S}^m -$ Südpol) und ($\mathbb{S}^m -$ Nordpol) überdecken. Also folgt auch $\operatorname{cat}(\mathbb{S}^m) \leq 1$ (auch für $m = 0$).
Alternativ könnten wir für $m \geq 1$ auch folgende minimale kategorische Überdeckung betrachten, in der U_1 nicht zusammenhängend ist:
Es sei $U_0 := \{(x_1, \ldots, x_{m+1} \in \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^m | \ -0,5 < x_{m+1} < 0,5\}$ ein offenes Band um den Äquator und $U_1 := \{(x_1, \ldots, x_{m+1} \in \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^m | \ x_{m+1} \neq 0\}$ die Sphäre ohne den Äquator.

Beispiel 1.3 (CW-Komplexe)
Ist X ein n-dimensionaler, zusammenhängender CW-Komplex, so gilt $\operatorname{cat}(X) \leq n$. Das kann man sich induktiv klar machen: Ist das $(k-1)$-Skelett $X^{(k-1)}$ bereits mit kategorischen Mengen überdeckt, so genügt eine zusätzliche, um $X^{(k)}$ zu überdecken, denn $X^{(k)} - X^{(k-1)}$ ist zusammenziehbar in X und Retrakt einer in X offenen Menge.

Zwei Mengen einer kategorischen Überdeckung minimaler, endlicher Länge eines wegzusammenhängenden Raumes X können keine leere Schnittmenge haben. Ist X wegzusammenhängend und normal, so muss es einen Punkt geben, der nur in einer der kategorischen Mengen liegt. Das folgt aus Satz 1.20. Zumindest für parakompakte Räume X gibt es sogar einen Punkt, der in allen diesen Mengen liegt. Das folgt aus Milnors Lemma in [CLOT03], Seite 288.
Es gibt viele Varianten von Definition 1.1. Zum Beispiel kann man Überdeckungen mit abgeschlossenen, anstatt offenen Mengen betrachten. Die so erhaltene Größe bezeichnet man mit $\operatorname{cat}^{cl}(X)$. Es gilt $\operatorname{cat}(X) = \operatorname{cat}^{cl}(X)$, falls X ein absoluter Umgebungsretrakt und normal ist ([CLOT03] Prop.1.10). Oder man kann fordern, dass die Kontraktionen einen Basispunkt fest lassen, und vieles mehr. Was man unter dem Begriff „Unterraum-Kategorie" versteht, führe ich in Abschnitt 1.4 ein. Noch eine weitere Variante, die i-Kategorie $\operatorname{cat}^i(X)$, stelle ich in Abschnitt 1.6 vor.

Im folgenden Satz fasse ich Eigenschaften von $\operatorname{cat}(X)$ zusammen, die im Weiteren benötigt werden. Sie finden sich in ähnlicher Formulierung an verschiedenen Stellen von [CLOT03], Kapitel 1.

Satz 1.4 (Eigenschaften von cat**)**

1. Homotopie-Invarianz: *Ist die Komposition* $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ *homotop zur Identität, so gilt* $\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{cat}(Y)$. *Insbesondere ist* cat *eine Homotopie-Invariante.*

2. Subadditivität: *Sind* X *und* Y *offen in* $X \cup Y$ *dann gilt*
$$\mathrm{cat}(X \cup Y) \leq \mathrm{cat}(X) + \mathrm{cat}(Y) + 1 \tag{1.1}$$
Falls X *und* Y *disjunkt sind, gilt Gleichheit, weshalb wir uns bei der Untersuchung der Kategorie eines Raumes auf seine Zusammenhangs-Komponenten beschränken können.*

3. Überlagerungen: *Ist* E *wegzusammenhängend und* $p : E \to B$ *eine Überlagerung, dann gilt*
$$\mathrm{cat}(E) \leq \mathrm{cat}(B) \tag{1.2}$$

4. Produkte: *Sind* X *und* Y *normal und wegzusammenhängend, dann gilt*
$$\mathrm{cat}(X \times Y) \leq \mathrm{cat}(X) + \mathrm{cat}(Y)$$

Beweis:
Zum Beweis der Homotopie-Invarianz beachte man, dass das Urbild einer kategorischen Überdeckung von Y unter g eine kategorische Überdeckung von X ist. Die Subadditivität folgt unmittelbar aus den Definitionen. Der Zusatz folgt, weil jede Wegzusammenhangs-Komponente in einer Zusammenhangs-Komponente enthalten ist. Zum Beweis von (1.2) betrachten wir eine vermittels $H : U_j \times [0;1] \to B$ kontrahierbare Teilmenge U_j von B und das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_j) \times 0 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
p^{-1}(U_j) \times [0;1] \arrow[r, "H \circ (p \times id)"] \arrow[ur, dashed] & B
\end{tikzcd}$$

Es zeigt, dass das Urbild einer kategorischen Überdeckung von B unter p eine kategorische Überdeckung von E ist: Wegen der Homotopie-Hochhebungseigenschaft ist nämlich $p^{-1}(U_j)$ in E kontrahierbar auf $p^{-1}(Punkt)$. Also ist $p^{-1}(U_j)$ kategorisch, weil $p^{-1}(Punkt)$ diskret und E wegzusammenhängend ist.
Den Beweis der Produktformel führe ich in Abschnitt 1.6 auf Seite 21. $\square$

1.2 Whiteheads Definition

G. W. Whitehead verdanken wir eine weitere Definition (siehe [Whi56], [Whi78], [CLOT03]), die nicht nur für sich interessant ist, sondern auch als erster Schritt in Richtung von Ganeas bedeutender Sichtweise betrachtet werden kann:

Definition 1.5 (Whiteheads Kategorie cat^{Wh})
Sei $(X,*)$ ein punktierter Raum und

$$T^n(X) := \{(x_1,\dots,x_n) \in X^n \mid \textit{mindestens ein } x_i \textit{ ist der Grundpunkt } *\},$$

auf englisch das sogenannte „fat wedge". Wir definieren $\operatorname{cat}^{Wh}(X)$ als die kleinste Zahl n, für die es eine Abbildung $\Delta' \colon X \to T^{n+1}(X)$ gibt, sodass das folgende Diagramm bis auf Homotopie kommutiert. Gibt es für keine natürliche Zahl n eine solche Abbildung, so sei $\operatorname{cat}^{Wh}(X) := \infty$. Im Diagramm ist $\Delta = \Delta_{n+1}$ die Diagonalabbildung und $j = j_{n+1}$ die Inklusion.

$$\begin{tikzcd} & T^{n+1}(X) \arrow[d, hook, "j"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\Delta'"] \arrow[r, "\Delta"'] & X^{n+1} \end{tikzcd}$$

Beispiel 1.6 ($T^2(X)$ nach [CLOT03])
Offensichtlich gilt $T^2(X) \cong X \vee X$. Eine Abbildung $\Delta' : X \to T^2(X) \cong X \vee X$ wie in Definition 1.5 kann als Co-Multiplikation gedeutet werden und $\operatorname{cat}^{Wh}(X) = 1$ ist gleichbedeutend damit, dass X ein nicht-zusammenziehbarer Co-H-Raum ist. Definition 1.5 verallgemeinert also den Begriff des Co-H-Raumes.

Satz 1.7 (cat und cat^{Wh})
Sei $(X,*)$ wegzusammenhängend.

1. *Ist X normal, so gilt $\operatorname{cat}^{Wh}(X) \leq \operatorname{cat}(X)$.*
2. *Besitzt der Grundpunkt $*$ eine zusammenziehbare offene Umgebung, so gilt $\operatorname{cat}^{Wh}(X) \geq \operatorname{cat}(X)$.*

Insbesondere gilt $\operatorname{cat}^{Wh}(X) = \operatorname{cat}(X)$, falls $(X,*)$ wegzusammenhängend und normal ist, sowie $*$ eine zusammenziehbare offene Umgebung besitzt.

Beweis (nach [FHT01]):
Zum Beweis von 1.7.1 nehmen wir an, dass $\operatorname{cat} X = n < \infty$. Wir wählen eine kategorische Überdeckung $U_1,\dots,U_{n+1}$ von X, Kontraktionen $H_i : U_i \times [0;1] \to X$ und wollen die Komponenten einer Abbildung $\Delta' : X \to T^{n+1}(X)$ konstruieren. Weil X wegzusammenhängend ist, können wir dazu annehmen, dass $H_i(u,1) = *$ für alle i und $u \in U_i$ gilt. Da X normal ist, können wir abgeschlossene Mengen $A_i \subset U_i$ wählen, sodass $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ gilt. Weiter können wir offene Mengen V_i und Abbildungen $\alpha_i : X \to [0;1]$ wählen, sodass $A_i \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$ und für die Restriktionen $\alpha_i|_{A_i} = 1$ sowie $\alpha_i|_{X-U_i} = 0$ gilt. Wir modifizieren unsere Kontraktionen H_i durch folgende Definition von Abbildungen $\widetilde{H}_i \colon X \times [0;1] \to X$:

$$\widetilde{H}_i(x,t) := \begin{cases} x & x \in X - U_i \\ H_i(x, \alpha_i(x) \cdot t) & x \in U_i \end{cases}$$

Insbesondere gilt dann für $x \in A_i$ weiterhin $\widetilde{H}_i(x,1) = *$. Die Abbildung $(\widetilde{H}_1(x,t), \ldots, \widetilde{H}_{n+1}(x,t))$ ist eine Homotopie von Δ zu einer Abbildung $\Delta' : X \to T^{n+1}(X)$, weil X von den A_i überdeckt wird.
Zum Beweis von 1.7.2 sei U eine zusammenziehbare offenen Umgebung des Grundpunkts und es gelte $\mathrm{cat}^{Wh}(X) = n < \infty$. Dann wählen wir eine Homotopie H von Δ nach $\Delta' = (\Delta'_1, \ldots, \Delta'_{n+1}) : X \to T^{n+1}(X)$ und definieren die offenen Mengen $U_i := (\Delta'_i)^{-1}(U)$. Aus der Definition von T^{n+1} folgt, dass $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$ und die i-te Komponente der Homotopie H liefert eine Deformation von U_i nach U. Also sind die U_i offen und zusammenziehbar, weil auch U es ist. $\square$

1.3 Ganeas Definition

Tudor Ganea ([Gan67]) hat eine wichtige neue Sichtweise auf die Kategorie geliefert, die bis auf Homotopie gar nicht weit entfernt von Whiteheads Definition liegt. Wir gehen deshalb zunächst von Definition 1.5 aus und vervollständigen das Diagramm zu einem Homotopie-Pullback:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{G}_n(X) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, shift left, "\widetilde{p}_n"] & T^{n+1}(X) \arrow[d, hook, "j_{n+1}"] \\
X \arrow[r, "\Delta_n"'] \arrow[u, dotted, shift left, "\exists s_n ?"] & X^{n+1}
\end{tikzcd}$$

Genauer ersetzen wir zunächst j_{n+1} durch eine Faserung und bilden dann das gewöhnliche Pullback. Deshalb ist $\widetilde{p}_n$ eine Faserung.

Satz und Definition 1.8 (cat^G und cat)
Erfüllt ein Raum $(X,*)$ die Voraussetzungen von Satz 1.7 (X normal, wegzusammenhängend, und $*$ hat eine offene zusammenziehbare Umgebung), so gilt $\mathrm{cat}(X) = n$ genau dann, wenn n die kleinste Zahl ist, für die es einen Schnitt $s_n : X \to \widetilde{G}_n(X)$ zur n-ten Faserung $\widetilde{p}_n$ gibt. Diese Zahl nennen wir $\mathrm{cat}^G(X)$.

Die Betrachtung der von Homologie- oder Kohomolgiefunktoren induzierten Abbildungen $(p_n)_*$ und $(p_n)^*$ führt auf untere Schranken für $\mathrm{cat}(X)$, was die Bedeutung dieser alternativen Definition erklärt. Ein Beispiel hierfür findet man in Abschnitt 1.5.

Tudor Ganea hat zu $\widetilde{G}_n(X)$ homotopieäquivalente Räume $G_n(X)$ und Faserungen $p_n : G_n(X) \to X$ auf eine andere Art konstruiert (siehe [Gan67], [CLOT03], [FHT01])und damit neue Möglichkeiten geschaffen, die Räume $G_n(X) \simeq \widetilde{G}_n(X)$ zu untersuchen (siehe Satz 1.12). Ich beschreibe Ganeas Konstruktion nach dem Beweis von Satz 1.8.

Beweis von Satz 1.8:
Es gilt $\operatorname{cat}(X) = \operatorname{cat}^{Wh}(X)$ nach Satz 1.7. Gilt $\operatorname{cat}^{Wh}(X) = \operatorname{cat}(X) \leq n$, so liefert eine Abbildung $\Delta' : X \to T^{n+1}(X)$ wie in Definition 1.5 zusammen mit der Pullback-Eigenschaft einen Schnitt s_n:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "s_n"] \arrow[drr, bend left, "\Delta'"] \arrow[ddr, bend right, "id"'] & & \\
& \widetilde{G}_n(X) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "\widetilde{p}_n"] & T^{n+1}(X) \arrow[d, hook, "j_{n+1}"] \\
& X \arrow[r, "\Delta"'] & X^{n+1}
\end{tikzcd}$$

Alles kommutiert zunächst bis auf Homotopie, aber die Homotopie-Hochhebungseigenschaft der Faserung $\widetilde{p}_n$ liefert dann auch einen echten Schnitt.
Umgekehrt kann man einfach $\Delta' := \delta_n \circ s_n$ definieren, falls es einen Schnitt s_n gibt. $\square$

CW-Komplexe X sind normal, jeder Punkt in X hat eine offene zusammenziehbare Umgebung und die Wegzusammenhangs-Komponenten entsprechen den Zusammenhangs-Komponenten. Wegen Satz 1.4.2 reicht es zur Bestimmung der Kategorie von X die Kategorie seiner (Weg-)Zusammenhangs-Komponenten X_i zu untersuchen. Nach den Sätzen 1.7 und 1.8 gilt dann $\operatorname{cat}(X) = \operatorname{cat}^{Wh}(X) = \operatorname{cat}^{G}(X)$.

An dieser Stelle gebe ich folgenden **Hinweis:**
Alle Räume, die ich in dieser Arbeit untersuchen will, sind CW-Komplexe und fast alle sind zusammenhängend. In der Regel können deshalb $\operatorname{cat}, \operatorname{cat}^{Wh}$ und cat^{G} als gleichbedeutend betrachten werden. Ich mache von nun an auch in der Notation keinen Unterschied mehr, werde es aber ausdrücklich anmerken, wenn ein CW-Komplex nicht zusammenhängend ist und deshalb seine Zusammenhangs-Komponenten einzeln untersucht werden.

Im Folgenden skizziere ich Ganeas Konstruktion der Räume $G_n(X)$.

Wir definieren die 0-te Ganeafaserung $F_0(X) \xrightarrow{i_0} G_0(X) \xrightarrow{p_0} X$ als Schleifen-Wege-Faserung $\Omega X \xrightarrow{i_0} PX \xrightarrow{p_0} X$ zu X. Haben wir die n-te Ganea-Faserung

$F_n(X) \xrightarrow{i_n} G_n(X) \xrightarrow{p_n} X$ bereits definiert, dann können wir p_n zu einer stetigen Abbildung $q_n : C(i_n) \to X$ von dem Abbildungskegel $C(i_n) := G_n(X) \cup_{F_n(X)} CF_n(X)$ nach X fortsetzen: Wir können nämlich $q_n(x) := p_n(x)$ für $x \in G_n(X)$ und $q_n([y,t]) := *$ für $[y,t] \in C(F_n(X))$ definieren. Den Raum $G_{n+1}(X)$ und die $(n+1)$-te Ganea Faserung p_{n+1} erhalten wir dann als die gewöhnliche fasernde Ersetzung $p_{n+1} \colon G_{n+1}(X) := C(i_n) \times_X X^I \to X$ von q_n:

$$\begin{tikzcd} F_n(X) \arrow[d, "i_n"'] & & \\ G_n(X) \arrow[r] \arrow[dr, "p_n"'] & C(i_n) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "q_n"] & G_{n+1}(X) \arrow[dl, "p_{n+1}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Diese Konstruktion ist funktoriell, d.h. eine punktierte Abbildung $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ liefert kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} G_k(Y) \arrow[r, "G_k(f)"] \arrow[d, "p_k^Y"'] & G_k(X) \arrow[d, "p_k^X"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

und es gilt:

Satz 1.9
Für jedes n gibt es eine Homotopieäquivalenz $G_n(X) \simeq \widetilde{G}_n(X)$, sodass das folgende Diagramm bis auf Homotopie kommutiert:

$$\begin{tikzcd} G_n(X) \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "p_n"'] & & \widetilde{G}_n(X) \arrow[dl, "\widetilde{p}_n"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Den Beweis dieses Satzes zitiere ich hier nicht. Man findet ihn in [CLOT03] auf Seite 29ff. Als Konsequenz erhalten wir insbesondere, dass Satz 1.8 entsprechend gilt, wenn wir $\widetilde{G}_n(X)$ durch $G_n(X)$ und $\widetilde{p}_n$ durch p_n ersetzen, denn einen Schnitt zu p_n gibt es genau dann, wenn es einen Schnitt zu $\widetilde{p}_n$ gibt:

Korollar 1.10 (cat^G)
Es gilt $\mathrm{cat}^G(X) = n$ genau dann, wenn n die kleinste Zahl ist, für die es einen Schnitt zur n-ten Ganea-Faserung $p_n : G_n(X) \to X$ gibt. □

Wir wollen jetzt sehen, dass $G_k(K(\pi,1))$ den Homotopietyp eines k-dimensionalen CW-Komplexes hat. Dazu brauchen wir das folgende Lemma von Ganea ([Gan65]).

Es sei

$$A * B := A \times B \times [0,1] \Big/ \begin{matrix} (a,b,0) \sim (a',b,0) \\ (a,b,1) \sim (a,b',1) \end{matrix}$$

das Join von A mit B und $*^n A$ das n-fache Join von A mit sich selbst. Bis auf Homotopieäquivalenz erhält man $A * B$ auch als Homotopiekolimes des Diagramms $A \longleftarrow A \times B \longrightarrow B$.

Lemma 1.11 (Ganea-Faser nach [Gan65])
Für die Faser $F_n(X)$ der n-ten Ganea-Faserung p_n zu einem CW-Komplex X gilt

$$F_n(X) \simeq *^{n+1}\Omega X.$$

Ich folge im Wesentlichen dem Beweis von Selick in [Sel97].

Beweis:
Es gilt $F_0(X) = \Omega X$ nach Definition. Induktiv folgt das Lemma aus der folgenden Aussage:

Ist $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ eine Faserung von CW-Komplexen und $F' \longrightarrow E' \xrightarrow{p'} B$ die Faserung, die daraus wie in Ganeas Konstruktion entsteht, also insbesondere $E' = (E \cup_F CF) \times_B B^I$. Dann gilt $F' \simeq F * \Omega B$.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[d] & F' \arrow[d] \\
E \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & E' = (E \cup_F CF) \times_B B^I \arrow[d, "p'"] \\
B \arrow[r, equal] & B
\end{tikzcd}$$

In dieser Situation gilt

$$\begin{aligned}
F' &= (E \cup_F CF) \times_B PB \\
&= (E \times_B PB) \cup_{F \times_B PB} (CF \times_B PB) \\
&= \operatorname{colim}(E \times_B PB \leftarrow F \times_B PB \rightarrow CF \times_B PB) \\
&= \operatorname{colim}(E \times_B PB \leftarrow F \times \Omega B \rightarrow CF \times \Omega B),
\end{aligned}$$

und allgemein

$$F * \Omega B \simeq \operatorname{hocolim}(F \leftarrow F \times \Omega B \rightarrow \Omega B).$$

Die Inklusion $\eta : F \to E \times_B PB$, $\eta(f) = (f, *)$ ist eine Homotopieäquivalenz, wie man durch Zurückziehen der Faserung $p : E \to B$ mit der Schleifen-Wege-Faserung $PB \to B$ sieht. Deshalb erhalten wir:

$$\begin{aligned}
F * \Omega B &\simeq \operatorname{hocolim}(E \times_B PB \leftarrow (E \times_B PB) \times \Omega B \rightarrow \Omega B) \\
&\simeq \operatorname{hocolim}(E \times_B PB \leftarrow (E \times_B PB) \times \Omega B \rightarrow C(E \times_B PB) \times \Omega B).
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Abbildung $\Phi : CF \times \Omega B \to C(E \times_B PB) \times \Omega B$, die wir durch $\Phi(f,t,\omega) := ((f,\omega),t,\omega)$ definieren, haben wir folgendes Diagramm, das bis auf Homotopie kommutiert:

$$
\begin{tikzcd}
F \times \Omega B \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook, "\iota"] \arrow[dd, "\Phi|_{F\times\Omega B}"'] & & CF \times \Omega B \arrow[dr] \arrow[dd, "\Phi"' near start] & \\
& E \times_B PB \arrow[rr, crossing over] \arrow[dd, equal] & & F' \\
(E \times_B PB) \times \Omega B \arrow[rr] \arrow[dr, "pr_1"] & & C(E \times_B PB) \times \Omega B \arrow[dr] & \\
& E \times_B PB \arrow[rr] & & F * \Omega B
\end{tikzcd}
$$

Das obere und untere Rechteck ist jeweils ein Homotopie-Pushout. Das untere ist eines nach Definition des Joins, und das obere ist ein Pushout mit einer Kofaserung $F \times \Omega B \to CF \times \Omega B$.
Es genügt also zu zeigen, dass die Abbildungen Φ und $\Phi|_{F\times\Omega B}$ Homotopieäquivalenzen sind. Mit Hilfe des oberen Homotopie-Pushouts erhalten wir eine Abbildung $F' \to F * \Omega B$, die dann (siehe z.B. [CLOT03] S.301) auch eine Homotopieäquivalenz ist.
Φ ist aber offensichtlich eine Homotopieäquivalenz, denn die Kegel sind zusammenziehbar, und auf den hinteren Faktoren ist Φ die identische Abbildung. Dass auch $\Phi' := \Phi|_{F\times\Omega B}$ eine Homotopieäquivalenz ist, sieht man an der Zerlegung $\Phi' \simeq \Psi \circ (\eta \times id)$, wobei $\Psi : (E \times_B PB) \times \Omega B \to (E \times_B PB) \times \Omega B$ durch $\Psi((e,\lambda),\omega) := ((e,\omega\lambda),\omega)$ gegeben ist. Die Abbildung $(\eta \times id)$ ist eine Homotopieäquivalenz, da η eine ist, und Ψ ist eine mit der homotopie-inversen Abbildung $((e,\lambda),\omega) \mapsto ((e,\omega^{-1}\lambda),\omega)$. Also ist auch Φ' eine Homotopieäquivalenz. $\square$

Damit läßt sich die Aussage über die Ganea-Räume zu Eilenberg-MacLane-Räumen vom Typ $(\pi,1)$ beweisen:

Satz 1.12 ($G_k(K(\pi,1))$)
Ist $X = K(\pi,1)$ ein Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ $(\pi,1)$, dann hat der k-te Ganea-Raum $G_k(X)$ zu X den Homotopietyp eines k-dimensionalen CW-Komplexes.

Beweis (nach den Bemerkungen in [CLOT03], Seite 28/29):
Jede Komponente von ΩX ist zusammenziehbar, denn $\Omega X \simeq \pi$ hat den Homotopietyp einer diskreten Menge. Mit der Definition $A * B = A \times B \times [0,1] / \sim$

sieht man induktiv, dass die n-te Ganea-Faser $F_n(X) \simeq *^{n+1}\Omega X$ bis auf Homotopie ein Bouquet von n-Sphären ist. Die Behauptung über $G_k(X)$ folgt dann auch induktiv: $G_0(X) = PX$ ist zusammenziehbar und

$$G_k(X) \simeq C\Big(F_{k-1}(X) \xrightarrow{i_{k-1}} G_{k-1}(X)\Big)$$

erhalten wir bis auf Homotopie aus $G_{k-1}(X)$ durch Ankleben von k-Zellen. □

1.4 CW-Komplexe und obere Schranken für cat(X)

Eine erste obere Schranke für die Kategorie eines zusammenhängenden CW-Komplexes, nämlich seine Dimension, wurde schon zu Beginn in Beispiel 1.3 vorgestellt. Es gibt viele Möglichkeiten diese Schranke zu verbessern. Ich will hier zwei Sätze genauer behandeln:

Satz 1.13 (($n-1$)-zusammenhängende CW-Komplexe)
Sei X ein $(n-1)$-zusammenhängender CW-Komplex, wobei $n \geq 1$. Dann gilt

$$\mathrm{cat}^{Wh}(X) \leq \frac{\dim(X)}{n}. \tag{1.3}$$

Beweis:
Der Fall $n = 1$ wurde in Beispiel 1.3 behandelt. Sei also $n \geq 2$. Wir können annehmen, dass X nur eine 0-Zelle hat und keine weiteren Zellen in Dimensionen $< n$ (zum Beispiel nach [Hat02], siehe auch die Beweisskizze von Satz 2.3 auf Seite 25). Wir wählen k so, dass $n \cdot k \leq \dim(X) < n \cdot (k+1)$ gilt und betrachten den Produktraum X^{k+1} mit der gewöhnlichen Produkt-Zellenzerlegung. Sei $\widetilde{\Delta}$ eine zelluläre Approximation von $\Delta : X \longrightarrow X^{k+1}$. Diese bildet nach T^{k+1} ab, da sich T^{k+1} von X^{k+1} nur durch Zellen der Dimension größer oder gleich $n \cdot (k+1) > \dim(X)$ unterscheiden.

$$\begin{tikzcd} & T^{k+1}(X) \arrow[d, hook, "j"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\Delta}"] \arrow[r, "\Delta"'] & X^{k+1} \end{tikzcd}$$

Folglich gilt $\mathrm{cat}^{Wh}(X) \leq k \leq \frac{\dim(X)}{n}$. □

Bevor ich den nächsten Satz formuliere, will ich den Begriff der Unterraumkategorie einführen. Für $A \subset X$ sagen wir $\mathrm{cat}_X(A) = n$, wenn A mit $n+1$ kategorischen Teilmengen von X überdeckt werden kann, aber nicht mit n. Natürlich gilt $\mathrm{cat}_X(X) = \mathrm{cat}(X)$ sowie $\mathrm{cat}_X(A) \leq \mathrm{cat}(X)$. Für $A, B \subset X$ gilt trivialerweise die Subadditivitätsformel $\mathrm{cat}_X(A \cup B) \leq \mathrm{cat}_X(A) + \mathrm{cat}_X(B) + 1$.

Satz 1.14 ($\mathrm{cat}(X - X^{(k-1)})$)
Sei X ein n-dimensionaler CW-Komplex und $X - X^{(k-1)}$ wegzusammenhängend, wobei $X^{(r)}$ das r-Skelett von X bezeichne. Dann gilt $\mathrm{cat}(X - X^{(k-1)}) \leq n - k$.

Beweis:
Aufgrund der Subadditivität gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{cat}(X - X^{(k-1)}) &= \mathrm{cat}_{X - X^{(k-1)}}\left(\coprod_{r=k}^{n} X^{(r)} - X^{(r-1)}\right) \\ &\leq n - k + \sum_{r=k}^{n} \mathrm{cat}_{X - X^{(k-1)}}\left(X^{(r)} - X^{(r-1)}\right). \end{aligned}$$

Es reicht also für alle $r \in \{k, k+1, \ldots, n\}$ zu zeigen, dass $\mathrm{cat}_{X - X^{(k-1)}}(X^{(r)} - X^{(r-1)}) = 0$ gilt, also dass $X^{(r)} - X^{(r-1)}$ von einer in $X - X^{(k-1)}$ offenen und zusammenziehbaren Menge überdeckt wird. Im Folgenden sei $r \in \{k, k+1, \ldots, n\}$ beliebig aber fest. $X^{(r)} - X^{(r-1)}$ ist disjunkte Vereinigung von offenen r-Bällen, also zusammenziehbar in $X - X^{(k-1)}$, weil $X - X^{(k-1)}$ wegzusammenhängend ist. Wir müssen deshalb nur noch zeigen, dass $X^{(r)} - X^{(r-1)}$ Retrakt einer in $X - X^{(k-1)}$ offenen Menge V_n ist. Im Folgenden definieren wir für $r \leq l \leq n$ rekursiv Mengen $V_l \supset X^{(r)} - X^{(r-1)}$, die offen in $X^{(l)} - X^{(k-1)}$ und retrahierbar auf $X^{(r)} - X^{(r-1)}$ sind:
Zunächst sei $V_r := X^{(r)} - X^{(r-1)}$. Ist die Menge $V_l \supset X^{(r)} - X^{(r-1)}$ offen in $X^{(l)} - X^{(k-1)}$ und retrahierbar auf $X^{(r)} - X^{(r-1)}$ bereits definiert, so erweitern wir V_l wie folgt zu V_{l+1}: Wir wählen für jede $(l+1)$-Zelle e einen Punkt x_e in ihrem Inneren, sowie radiale Homotopien $h_t^e : X^{(l)} \cup (e - x_e) \to X^{(l)} \cup (e - x_e)$, also Homotopien relativ zu $X^{(l)}$ mit $h_0^e = id$, $h_1^e : X^{(l)} \cup (e - x_e) \to X^{(l)}$ und $h_1^e \circ h_t^e = h_1^e$. Die Menge $(h_1^e)^{-1}(V_l)$ entsteht dann aus V_l durch Ankleben eines in $\overline{e}$ offenen Kegelstumpfes über $V_l \cap \partial e$. Wir definieren $V_{l+1} := \bigcup_e (h_1^e)^{-1}(V_l)$, wobei die Vereinigung über alle $(l+1)$-Zellen e läuft. $V_{l+1} \supset X^{(r)} - X^{(r-1)}$ ist dann offen in $X^{(l+1)} - X^{(k-1)}$ (schwache Topologie) und retrahierbar auf $X^{(r)} - X^{(r-1)}$. Das zeigt $\mathrm{cat}_{X - X^{(k-1)}}\left(X^{(r)} - X^{(r-1)}\right) = 0$. □

Diesem Beweis liegt die gleiche Idee zugrunde, wie dem Beweis, dass jeder CW-Teilraum eines CW-Komplexes X starker Deformationsretrakt einer in X offenen Menge ist.

1.5 Untere Schranken für $\mathrm{cat}(X)$

In diesem Abschnitt stelle ich zwei untere Schranken für die Kategorie vor, die beide aus der Kohomologie folgen. Die einfachsten unteren Schranken für die Kategorie eines Raumes X sind durch cup-Längen $\mathrm{cup}_R(X)$ gegeben. Wir sagen $\mathrm{cup}_R(X) = n$, wenn n die kleinste Zahl ist, sodass alle cup-Produkte in $H^*(X; R)$ mit mindestens $n+1$ Faktoren positiven Grades verschwinden.

Satz 1.15 ($\cup_R$ und cat)
Es gilt $\mathrm{cup}_R(X) \leq \mathrm{cat}(X)$ *für jeden Koeffizientenring R.*

Dieses Standardresultat findet sich auch in [CLOT03].

Beweis:
Es gelte $\mathrm{cat}(X) = n < \infty$ und $U_0, \ldots, U_n$ sei eine kategorische Überdeckung von X. Wir betrachten das folgende Diagramm, in dem die horizontalen Abbildungen Tupel von Kohomologieklassen auf ihr cup-Produkt senden und die vertikalen Abbildungen von den Inklusionen induziert werden:

$$\begin{array}{ccc} H^{k_0}(X, U_0) \times \cdots \times H^{k_n}(X, U_n) & \longrightarrow & H^{\sum k_i}(X, \bigcup U_i) = 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{k_0}(X) \times \cdots \times H^{k_n}(X) & \longrightarrow & H^{\sum k_i}(X) \end{array}$$

Das Diagramm kommutiert nach Definition der cup-Produkte. Da die U_i in X zusammenziehbar sind, ist die vertikale Abbildung links für $k_i \geq 1$ surjektiv, denn jede Komponente ist es dann. Also gilt $\mathrm{cup}(X) \leq n$, denn ein Produkt von $n + 1$ nichttrivialen Kohomologieklassen liegt dann im Bild der trivialen Gruppe rechts oben. □

Beispiel 1.16 ($\mathrm{cat}(\mathbb{R}P^{n-1})$)
Es gilt $\mathrm{cat}(\mathbb{R}P^{n-1}) = n - 1$, *denn als obere Schranke haben wir die Dimension und als untere Schranke die cup-Länge für* $Z/2\mathbb{Z}$*-Koeffizienten, die jeweils gleich* $n - 1$ *sind.*

Definition 1.17 (R-Gewicht)
Sei $p_n : G_n(X) \to X$ *die* n*-te Ganea-Faserung.*
Für $u \in H^*(X; R)$ *mit* $u \neq 0$ *sei das R-Gewicht von u, kurz* $\mathrm{wgt}_R(u)$*, das größte k, sodass* $p_{k-1}^*(u) = 0 \in H^*(G_{k-1}(X); R)$.

Satz 1.18 (Eigenschaften von wgt_R, siehe [CLOT03] Seite 64 und 242f)

Sei $u \in H^k(X; R)$ *und* $u \neq 0$. *Dann gilt:*

1. $\mathrm{wgt}_R(u) \leq \mathrm{cat}(X)$.

2. *Ist* X *ein CW-Komplex und* $u \in H^k(X; R)$, *so gilt* $\mathrm{wgt}_R(u) \leq k$.

3. *Ist* $u \in H^k(K(\pi, 1); R)$ *eine Klasse in der Kohomologie eines Eilenberg-MacLane-Raumes vom Typ* $(\pi, 1)$, *so gilt* $\mathrm{wgt}_R(u) = k$.

4. *Für eine Abbildung* $f : Y \to X$ *mit* $f^*(u) \neq 0$ *gilt* $\mathrm{wgt}_R(f^*(u)) \geq \mathrm{wgt}_R(u)$. *Mit anderen Worten: Verschwindet eine Klasse beim Zurückziehen nicht, so kann sich ihr Gewicht nicht verringern.*

Beweis:
Satz 1.18.1. folgt direkt aus Ganeas Definition 1.8 auf Seite 12: Gilt $\mathrm{cat}(X) = n$, dann gibt es einen Schnitt s_n zu p_n. Also gilt $s_n^* \circ p_n^* = (p_n \circ s_n)^* = id^*$. Das zeigt $p_n^*(u) \neq 0$ und folglich $\mathrm{wgt}_R(u) \leq n = \mathrm{cat}(X)$.
Zum Beweis von 1.18.2 betrachten wir das k-Skelett $X^{(k)}$ von X. Aufgrund der Funktorialität von Ganeas Konstruktion haben wir das folgende kommutative Diagramm, indem $i_k : X^{(k)} \to X$ die Inklusion ist:

$$\begin{tikzcd} G_k(X^{(k)}) \arrow[r, "G_k(i_k)"] \arrow[d, "p_k^{X^{(k)}}"'] & G_k(X) \arrow[d, "p_k^X"] \\ X^{(k)} \arrow[r, "i_k"] & X \end{tikzcd}$$

Zu $p_k^{X^{(k)}}$ gibt es einen Schnitt, weil $\mathrm{cat}(X^{(k)}) \leq k$ gilt. Also ist $(p_k^{X^{(k)}})^* = H^*(p_k^{X^{(k)}}; R)$ injektiv. Weil auch $H^k(i_k; R)$ injektiv ist, gilt $H^*(p_k^X; R)(u) \neq 0 \in H^k(G_k(X); R)$ und folglich $\mathrm{wgt}_R(u) \leq k$.
Wegen 1.18.2 ist für 1.18.3 nur noch zu beweisen, dass auch $\mathrm{wgt}_R(u) \geq k$ gilt. Dies folgt aber, da $G_n(K(\pi, 1))$ nach Satz 1.12 den Homotopietyp eines n-dimensionalen CW-Komplexes hat. Die Abbildung $p_n^* : H^k(K(\pi, 1); R) \to H^k(G_n(K(\pi, 1)); R)$ ist für $n \leq k-1$ folglich die Nullabbildung.
Zum Beweis von 1.18.4 betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} G_{k-1}(Y) \arrow[r, "G_{k-1}(f)"] \arrow[d, "p_{k-1}^Y"'] & G_{k-1}(X) \arrow[d, "p_{k-1}^X"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Es zeigt, dass $(p_{k-1}^Y)^*(f^*(u)) = G_{k-1}(f)^*((p_{k-1}^X)^*(u)) = 0$ aus $(p_{k-1}^X)^*(u) = 0$ folgt. $\square$

1.6 Hardies i-Kategorie

Hardie hat in [Har71a], [Har71b] den Blick auf eine weitere Definition gerichtet. Seine Version verallgemeinert die von Whitehead. Ich behandle hier eine Version mit offenen Mengen:

Definition 1.19 (i-Kategorie)
Für eine natürliche Zahl $i \geq 1$ sei $\mathrm{cat}^i(X)$ die kleinste Zahl n, sodass es eine Überdeckung von X mit zusammenziehbaren offenen Mengen $U_1, \ldots, U_{n+1}$ gibt, sodass jedes $x \in X$ in mindestens i dieser Mengen enthalten ist. So eine Überdeckung nennen wir eine kategorische i-Überdeckung von X.

Offensichtlich gilt $\mathrm{cat}^1(X) = \mathrm{cat}(X)$. Allgemeiner gilt:

Satz 1.20 (Kategorie und i-Kategorie)
Ist X normal und wegzusammenhängend, so gilt

$$\operatorname{cat}(X) = \operatorname{cat}^i(X) - i + 1$$

Beweis:
Zum Beweis von $\operatorname{cat}(X) \geq \operatorname{cat}^i(X) - i + 1$ reicht es, folgende Aussage zu zeigen:

> Ist $U_1, \ldots, U_{n+1}$ eine kategorische i-Überdeckung von X, so gibt es eine offene Menge U_{n+2}, sodass $U_1, \ldots, U_{n+1}, U_{n+2}$ eine kategorische $(i+1)$-Überdeckung von X ist.

Um diese Aussage zu beweisen, führe ich die Übungsaufgabe 1.12 in [CLOT03] aus:
Wir definieren die offenen Mengen

$$F_m := \left\{ x \in X \,\middle|\, x \text{ liegt in mindestens } i \text{ der Mengen } U_1, \ldots, \widehat{U_m}, \ldots, U_{n+1} \right\}.$$

Offensichtlich ist F_m offen und es gilt $X - F_m \subset U_m$. Da X normal ist, können wir induktiv für $m = 1, 2, \ldots, n+1$ offene Mengen V_i wählen, die folgende Inklusionskette erfüllen:

$$(X - F_m) \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{m-1} (X - U_j) \right) \subset V_m \subset \overline{V}_m \subset U_m \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{m-1} (X - \overline{V}_j) \right) \tag{1.4}$$

Für $m = 1$ ist das offensichtlich und haben wir $V_1, V_2, \ldots, V_{m-1}$ bereits so gewählt, gilt nämlich neben $X - F_m \subset U_m$ auch $\bigcap_{j=1}^{m-1}(X - U_j) \subset \bigcap_{j=1}^{m-1}(X - \overline{V}_j)$. Wegen der letzten Inklusionsrelation in (1.4) sind die V_i paarweise disjunkt. Und weil $V_i \subset U_i$ nach Konstruktion, ist $U_{n+2} := \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i$ zusammenziehbar in X. Man muss sich nur noch klar machen, dass $U_1, \ldots, U_{n+1}, U_{n+2}$ eine kategorische $(i+1)$-Überdeckung von X ist. Das ist aber klar: Angenommen $x \in X$ war noch nicht in $i+1$ der Mengen $U_1, \ldots, U_{n+1}$ enthalten, und sei k minimal mit $x \in U_k$. Dann folgt $x \in (X - F_k)$ sowie $x \in \bigcap_{j=1}^{k-1} X - U_j$. Also gilt $x \in V_k$ nach Wahl der V_m.
Der Beweis der umgekehrten Ungleichung $\operatorname{cat}(X) \leq \operatorname{cat}^i(X) - i + 1$ ist trivial: Nehmen wir von einer kategorischen i-Überdeckung $i - 1$ der überlagernden Mengen weg, so erhalten wir eine kategorische (1-)Überdeckung von X. □

Damit lässt sich die Produkt-Ungleichung $\operatorname{cat}(X \times Y) \leq \operatorname{cat}(X) + \operatorname{cat}(Y)$ für normale, wegzusammenhängende Räume beweisen:

Beweis von Satz 1.4.4 auf Seite 10:
Sei $\operatorname{cat}(X) = n$ und $\operatorname{cat}(Y) = m$. Wir wählen eine kategorische $(m+1)$-Überdeckung $\{U_i\}$ für X und eine kategorische $(n+1)$-Überdeckung $\{V_j\}$ für Y minimaler Länge. Beide haben die Länge $n + m + 1$. Deshalb wird $X \times Y$ von

$\{W_k := U_k \times V_k | (1 \leq k \leq n+m+1)\}$ überdeckt: Denn jeder Punkt von X ist in höchstens n der U_i nicht enthalten und jeder Punkt von Y ist in höchstens m der V_j nicht enthalten. Also liegt jedes Paar (x, y) in mindestens einer der Mengen W_k. $\square$

Kapitel 2

Konfigurationsräume

2.1 Grundlegendes

Für einen topologischen Raum X und eine positive ganze Zahl n definieren wir den geordneten n-fachen Konfigurationsraum

$$\widetilde{C}^n(X) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n | x_i \neq x_j \text{ für } 1 \leq i \neq j \leq n\}. \tag{2.1}$$

Das ist der Raum aller n-Tupel mit paarweise verschiedenen Koordinaten. Auf dem Raum $\widetilde{C}^n(X)$ operiert die symmetrische Gruppe Σ_n durch Permutation der Koordinaten. Dividieren wir diese Aktion heraus, so erhalten wir den ungeordneten Konfigurationsraum

$$C^n(X) := \widetilde{C}^n(X)/\Sigma_n, \tag{2.2}$$

den Raum aller $n-$elementigen Teilmengen von X. Gemäß ihrer Konstruktion ist die Topologie von Konfigurationsräumen durch die Produkt-, Teilraum- und Quotiententopologie bestimmt. Die Operation von Σ_n auf $\widetilde{C}^n(X)$ ist frei. Weil die symmetrische Gruppe Σ_n endlich ist, operiert sie, falls X hausdorffsch ist, auch eigentlich diskontinuierlich und die Quotientenabbildung $\widetilde{C}^n(X) \to C^n(X)$ ist eine reguläre Überlagerung.
Ist M eine Mannigfaltigkeit der Dimension m, so sind $\widetilde{C}^n(M)$ und $C^n(M)$ Mannigfaltigkeiten der Dimension nm. Die nachstehende fundamentale Folge von Faserungen π_i für eine Mannigfaltigkeit der Dimension $dim(M) \geq 2$ ist ein wesentliches Ergebnis von Fadell und Neuwirth aus [FN62]. Dabei bezeichne π_i die Projektion auf die i-te Koordinate und M_t entstehe aus M durch Wegnehmen von t Punkten, die wir fest wählen und zwar so, dass $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots$. Wir erhalten

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{C}^n(M) \arrow[d, "\pi_n"'] & \widetilde{C}^{n-1}(M_1) \arrow[l] \arrow[d, "\pi_{n-1}"] & \widetilde{C}^{n-2}(M_2) \arrow[l] \arrow[d, "\pi_{n-2}"] & \cdots \arrow[l] & \widetilde{C}^2(M_{n-2}) \arrow[l] \arrow[d, "\pi_2"] & M_{n-1} \arrow[l] \\
M = M_0 & M_1 & M_2 & & M_{n-2} &
\end{tikzcd}$$

Im nächsten Abschnitt zeige ich, was sich bei der Untersuchung dieser Faserungen im Fall $M = \mathbb{R}^m$ ergibt.

2.2 Euklidische Konfigurationsräume

Setzen wir $M = \mathbb{R}^m$ mit $m \geq 2$, so erhalten wir bis auf Homotopieäquivalenz das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m) \arrow[d, "\pi_n"'] & \widetilde{C}^{n-1}(\mathbb{R}^m_1) \arrow[l] \arrow[d, "\pi_{n-1}"] & \widetilde{C}^{n-2}(\mathbb{R}^m_2) \arrow[l] \arrow[d, "\pi_{n-2}"] & \cdots \arrow[l] & \widetilde{C}^2(\mathbb{R}^m_{n-2}) \arrow[l] \arrow[d, "\pi_2"] & \bigvee_{n-1} \mathbb{S}^{m-1} \arrow[l] \\
\mathbb{R}^m & \mathbb{S}^{m-1} & \bigvee_2 \mathbb{S}^{m-1} & \cdots & \bigvee_{n-2} \mathbb{S}^{m-1} &
\end{tikzcd}$$

Für $m \geq 2$ folgt daraus durch wiederholte Anwendung der langen exakten Homotopiesequenz sofort, dass $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)$ $(m-2)$-zusammenhängend ist. Obige Folge von Faserungen erlaubt auch die Berechnung der Kohomologie der geordneten Konfigurationsräume (siehe [CLM76], [CT78], [FH01], [Coh95]). Ich zitiere nach [Coh95], Seite 22:

Satz 2.1 (Kohomologie von $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)$)
Für $m \geq 2$ wird der Kohomologiering $H^*(\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m); \mathbb{Z})$ von Elementen $A_{i,j}$ erzeugt, wobei $1 \leq j < i \leq n$. Für ihren Grad gilt $|A_{i,j}| = m-1$. Ein vollständiges Erzeugendensystem für die Relationen ist durch

1. $A_{i,j}^2 = 0$
2. $A_{i,j}A_{i,k} = A_{k,j}(A_{i,k} - A_{i,j})$ *für* $j < k < i$
3. *Assoziativität und (graduierte) Kommutativität*

gegeben.

Folgerung 2.2 ($\mathrm{cup}_{\mathbb{Z}}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m))$)

1. $\overline{H}^q(\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m); \mathbb{Z}) \begin{cases} \neq 0 \text{ und frei}, & \text{falls } q = k(m-1) \text{ mit } 1 \leq k \leq n-1, \\ = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
2. *Insbesondere gilt* $\mathrm{cup}_{\mathbb{Z}}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)) = n-1$.

Die Kohomologie der ungeordneten Konfigurationsräume ist erheblich komplizierter, und es gibt offene Fragen. Eine einigermaßen explizite Beschreibung dieser Ringe ist nur für Spezialfälle in der Literatur zu finden. Zum Beispiel ist die cup-Länge im Ring $H^*(C^n(\mathbb{R}^m); \mathbb{Z})$ im Allgemeinen nicht bekannt und womöglich nicht in geschlossener Form darstellbar. Selbst die maximale Höhe eines beliebigen Elements in $H^*(C^n(\mathbb{R}^m); \mathbb{Z})$ ist unbekannt. Fred Cohen äußerte die Vermutung, dass die Höhe im Fall $m = 2^r + 1$ durch 2^{r+1} gegeben sein

könnte. Jedenfalls konnte ich durch Untersuchung von cup-Längen keine interessanten unteren Schranken für die Kategorie $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m))$ finden. Ich danke Fred Cohen für seine Anmerkungen zu diesen Fragen.
Im Fall $m = 2$ wurde eine explizite Beschreibung der Ringe $H^*(C^n(\mathbb{R}^2); \mathbb{Z}) = H^*(B_n; \mathbb{Z})$ durch Fuks und Vaĭnšteĭn ([Fuk70], [Vai78]) gegeben. Dabei bezeichnet $B_n = \pi_1(C^n(\mathbb{R}^2))$ die n-te Zopfgruppe. Der Ansatz nutzt eine Zellenzerlegung der Einpunkt-Kompaktifizierung $C^n(\mathbb{R}^2)_\infty$ und dann den Poincaré-Lefschetz-Isomorphismus $H^*(C^n(\mathbb{R}^2); \mathbb{Z}) \cong \overline{H}_{2n-*}(C^n(\mathbb{R}^2)_\infty; \mathbb{Z})$. Die Idee der Zellenzerlegung wurde später von Vassiliev verallgemeinert. Im Folgenden spreche ich zunächst über CW-Modelle von euklidischen Konfigurationsräumen oder deren Einpunkt-Kompaktifizierungen, und kehre dann im übernächsten Abschnitt zur Kohomologie zurück.

2.3 Zelluläre Modelle und Euklidische Konfigurationsräume

Zunächst beschäftigen wir uns wieder mit geordneten Konfigurationsräumen und ziehen eine Folgerung aus Satz 2.1:

Satz 2.3 (Zellenmodell für $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)$ falls $m \geq 3$)
Sei $m \geq 3$. Dann gibt es einen zu $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)$ homotopieäquivalenten CW-Komplex Y, der nur Zellen in den Dimensionen $q \cdot (m-1)$ hat, wobei $q = 0, 1, \ldots, n-1$ gilt.

Beweisskizze:
Der Raum $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)$ hat als differenzierbare Mannigfaltigkeit den Homotopietyp eines CW-Komplexes. Da $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)$ für $m \geq 3$ einfach zusammenhängend ist, kann ein Komplex Y wie in Satz 2.3 explizit konstruiert werden. Dies ist in [Hat02], Kapitel 4.C, Seite 429f (auch für den Fall nicht freier Homologie) ausgeführt. Man konstruiert die Skelette $Y^{(k)}$ von Y induktiv, jeweils zusammen mit einer Abbildung $f^{(k)} : Y^{(k)} \to \widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)$, die eine Homologieäquivalenz in Graden $\leq k$ induziert. Man beachte, dass anders als in Hatchers Beweis nicht nur „$<$“, sondern wirklich „$\leq$“ gilt, weil in unserem Fall die Homologie frei ist. Wegen Folgerung 2.2 erhalten wir für $Y := Y^{((n-1)(m-1))}$ und $f := f^{((n-1)(m-1))}$ eine *Homologie*äquivalenz $f : Y \to \widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)$, die nach dem Satz von Whitehead eine *Homotopie*äquivalenz ist. □

Eine geometrische Konstruktion solcher Zellenmodelle findet sich in [FH01]. Dort wird das Ergebnis mit besonderer Begründung auch für $m = 2$ hergeleitet.

Wir wenden uns nun den Einpunkt-Kompaktifizierungen $C^n(\mathbb{R}^m)_\infty$ zu. Um die Kohomologie der Zopfgruppen mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Koeffizienten zu berechnen, beschrieb Fuks in [Fuk70] folgende Zellenzerlegung von $C^n(\mathbb{R}^2)_\infty$: Einzige Nullzelle ist der

Punkt ∞. Weiter haben wir für jede geordnete Partition $(m_1, \dots, m_q)$ von n eine Zelle $e(m_1, \dots, m_q)$ der Dimension $n + q$. Es gilt also $q > 0$, $\sum m_i = n$ und $m_i \in \mathbb{N}_{>0}$ für alle $1 \leq i \leq q$. Die Zelle $e(m_1, \dots, m_q) \subset C^n(\mathbb{R}^2)$ ist die Menge aller n-Konfigurationen in $\mathbb{R}^2$, die auf q vertikalen Linien konzentriert sind, und zwar so, dass genau m_i der Punkte auf der i-ten Senkrechten (von links gezählt) liegen. Um einen Punkt $\zeta \in e(m_1, \dots, m_q)$ zu wählen, haben wir $n + q$ Freiheitsgrade: q um die Abszissen der q Senkrechten zu wählen und n für die Wahl der Ordinaten. In [Fuk70] konstruiert Fuks Homöomorphismen $e(m_1, \dots, m_q) \cong (0;1)^{(n+q)}$ und charakteristische Abbildungen, die zeigen, dass die Zellen $e(m_1, \dots, m_q)$ zusammen mit dem Punkt ∞ die Zellen einer CW-Zerlegung von $C^n(\mathbb{R}^2)_\infty$ bilden. Für die Randabbildung ∂ im zugehörigen zellulären Kettenkomplex mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Koeffizienten gilt nach [Fuk70]

$$\partial e(m_1, \dots, m_q) = \sum_{i=1}^{q-1} \binom{m_i + m_{i+1}}{m_i} e(m_1, \dots, m_i + m_{i+1}, \dots, m_q). \tag{2.3}$$

Diese Formel erklärt sich so: Wenn wir eine Konfiguration ζ in $e(m_1, \dots, m_q)$ so in den Rand verschieben, dass die Punkte von der i-ten und $(i+1)$-ten Senkrechten auf einer gemeinsamen Senkrechten landen, so gibt es $\binom{m_i+m_{i+1}}{m_i}$ Möglichkeiten, wie diese $m_i + m_{i+1}$ Punkte auf der neuen Senkrechten verteilt sein können, siehe Abbildung 2.1 für ein Beispiel. Man beachte, dass sich die Anordnung von Punkten, die von der gleichen Senkrechten kommen, nicht ändern kann. Jede Art, die Punkte zu shuffeln gibt einen der Summanden $e(m_1, \dots, m_i + m_{i+1}, \dots, m_q)$ in (2.3) und wir müssen alle Paare von benachbarten Geraden berücksichtigen.

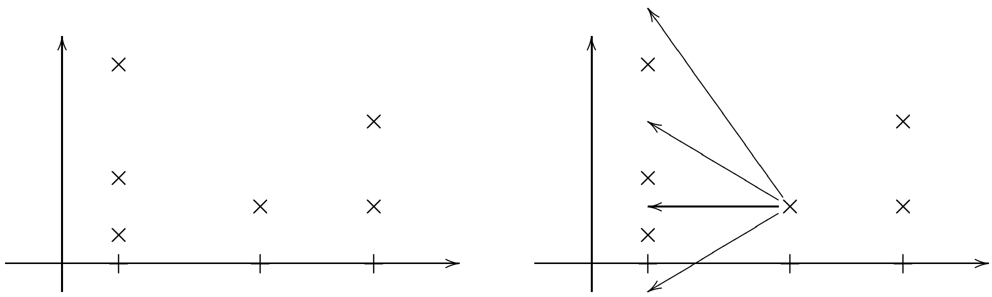

Abbildung 2.1: Eine Konfiguration $\zeta \in C^6(\mathbb{R}^2)$, die nach der Zellenzerlegung von Fuks ([Fuk70]) in der Zelle $e(3,1,2)$ liegt: ζ ist auf drei Senkrechten konzentriert, wobei auf der linken 3, auf der mittleren 1 und auf der rechten 2 Punkte von ζ liegen. Rechts ist verdeutlicht, warum die Zelle $e(4,2)$ in der Randformel (2.3) genau $4 = \binom{3+1}{1}$-mal auftritt: Es gibt 4 Möglichkeiten, den Punkt auf der mittleren Senkrechten auf der linken Senkrechten einzuordnen.

Die Zellen $e(m_1, \dots, m_q)$ von $C^n(\mathbb{R}^2)_\infty$ lassen sich zur Vorbereitung einer Verallgemeinerung auf die Räume $C^n(\mathbb{R}^m)_\infty$ für $m \geq 2$ auf eine weitere Art beschreiben, nämlich mit Bäumen. Dies geht auf Vassiliev zurück, siehe [Vas88] und [Vas92]. Einer Zelle $e(m_1, \ldots, m_q) \subset C^n(\mathbb{R}^2)$ ordnen wir zunächst folgendermaßen einen Baum zu. In Abbildung 2.2 und 2.4 sind zwei Fälle illustriert. Zunächst geben wir uns drei horizontale Hilfslinien L_0, L_1 und L_2 vor, wobei L_0 über L_1 und L_1 über L_2 liegen soll. Auf der obersten Hilfslinie L_0 markieren wir eine Ecke, auf der mittleren q und auf der unteren n. Wir verbinden dann die Ecke auf L_0 mit allen q Ecken auf L_1 durch Kanten. Zusätzlich verbinden wir die i-te Ecke auf L_1 mit m_i Ecken auf L_2 und zwar der Reihe nach von links nach rechts, sodass jede Ecke von L_2 mit genau einer Ecke von L_1 verbunden wird ohne dass Überkreuzungen entstehen. Einen solchen Baum nennen wir einen $(n, 2)$-Baum. Dabei sollen $(n, 2)$-Bäume, die durch isotope horizontale Verschiebungen von Ecken ineinander übergehen, als gleich betrachtet werden. Die $(n, 2)$-Bäume entsprechen dann bijektiv den Zellen $e(m_1, \ldots, m_q) \subset C^n(\mathbb{R}^2)$. Das sieht man leicht, wenn man bedenkt, dass sowohl jeder $(n, 2)$-Baum, als auch jede Zelle der Form $e(m_1, \ldots, m_q)$ genau einer geordneten Zerlegung der Zahl n entspricht. Der zu $e(m_1, \ldots, m_q)$ gehörende Baum hat genau q Ecken auf L_1 und m_i ist die Anzahl der Ecken auf L_2, die mit der i-ten Ecke auf L_1 verbunden sind.

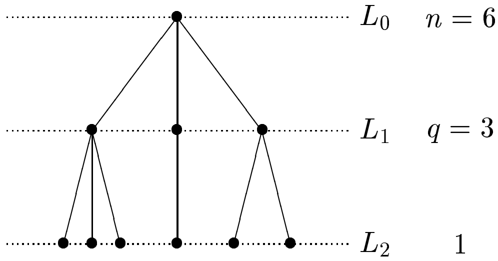

Abbildung 2.2: Der Baum, den wir der Zelle $e(3, 1, 2) \subset C^6(\mathbb{R}^2)$ zuordnen und somit auch der Konfiguration ζ aus Abbildung 2.1, die in der Zelle $e(3, 1, 2)$ liegt.

Wir wollen jetzt sehen, wie sich die Formel (2.3) in der graphischen Bestimmung der Randabbildung mit Bäumen wiederfindet. Es ist klar, dass der Rand einer $(n+q)$-dimensionalen Zelle $e(m_1, \ldots, m_q)$ durch eine Summe von $(n, 2)$-Bäumen beschrieben wird, von denen jeder genau $q-1$ Ecken auf der mittleren Hilfslinie hat, denn nur solche Bäume repräsentieren Zellen der Dimension $n + q - 1$. Genauer erhalten wir den zu einem Summanden $e(m_1, \ldots, m_i + m_{i+1}, \ldots, m_q)$ aus (2.3) gehörenden Baum, indem wir im Baum zu $e(m_1, \ldots, m_q)$ die i-te und $(i + 1)$-te Ecke auf L_1 miteinander verschmelzen. Es entsteht eine neue Ecke, mit $m_i + m_{i+1}$ nach unten abgehenden Kanten, siehe Abbildung 2.3 für ein Beispiel.

Dieser Baum muss nach Formel (2.3) genau $\binom{m_i+m_{i+1}}{m_i}$-mal auftreten. Um die spätere Verallgemeinerung vorzubereiten, stelle man sich vor, dass wir diese Summanden durch shuffeln der Familien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ der m_i bzw. m_{i+1} Kanten erhalten, die im Baum zu $e(m_1, \ldots, m_q)$ von der i-ten bzw. $(i+1)$-ten Ecke auf L_1 nach unten abgehen. Besser noch stellen wir uns unter $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schon jetzt

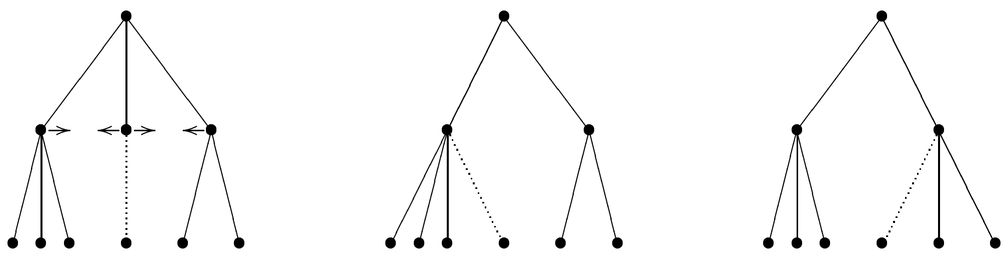

Abbildung 2.3: In der Mitte und rechts sind die zwei Bäume abgebildet, die aus dem Baum links beim Verschmelzen von Ecken entstehen können, die die Bedingungen von Seite 30 erfüllen. Um den Rand zu bestimmen, müssen wir noch shuffeln (analog zu Formel (2.3)). Es entsteht viermal der mittlere Baum und dreimal der rechte. Modulo zwei ist der Rand des linken Baumes also durch den rechten gegeben.

Familien von Unterbäumen mit m_i bzw. m_{i+1} Elementen vor. Die Elemente von $\mathcal{A}$ sind genau die Kanten, die im Baum zu $e(m_1, \ldots, m_q)$ von der i-ten Ecke auf L_1 nach unten abgehen, zusammen mit den anhängenden Ecken. Entsprechendes gilt für $\mathcal{B}$.

Wie schon erwähnt, hat Vassiliev Fuks' Vorgehen verallgemeinert und Zellenzerlegungen für $C^n(\mathbb{R}^m)_\infty$ beschrieben, siehe [Vas88] und [Vas92], S. 28ff. Wie im Fall $m = 2$ hat $C^n(\mathbb{R}^m)_\infty$ nur den Punkt ∞ als 0-Zelle. Die weiteren Zellen beschreibt Vassiliev durch Bäume. Ich beschreibe zunächst, wie man einer *Konfiguration* $\zeta \in C^n(\mathbb{R}^m)$ direkt einen Baum zuordnet. Die weiteren Zellen von $C^n(\mathbb{R}^m)_\infty$ definieren wir später als Mengen von Konfigurationen, denen der gleiche Baum zugeordnet wird.
Wir wählen eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^m$ und betrachten für $0 \leq i \leq m$ die Mächtigkeiten $n_i := \#\pi_i(\zeta)$, wobei π_i die orthogonale Projektion auf den von den ersten i Basisvektoren aufgespannten Raum sei. Stets gilt $n_0 = 1$, sowie $n_m = n$. Dann geben wir uns $m + 1$ horizontale Hilfslinien $L_0, \ldots L_m$ vor, die wir von oben nach unten anordnen, und markieren auf L_i genau n_i Punkte. Wir können die Punkte auf L_i den Elementen von $\pi_i(\zeta)$ eindeutig zuordnen, indem wir jeweils lexikographisch ordnen. Es bleibt zu sagen, welche der Punkte durch Kanten verbunden werden sollen: Wir verbinden zwei Punkte $a \in L_i$ und $b \in L_{i+1}$ genau dann, wenn es ein $x \in \zeta$ gibt, sodass $\pi_i(x) = a$ und $\pi_{i+1}(x) = b$. Zum Beispiel ist der einzige Punkt auf L_0 immer mit allen Punkten auf L_1 verbunden.

Beispiel 2.4
Wir wählen die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ und betrachten eine Konfiguration $\zeta \in C^3(\mathbb{R}^2)$. Weiter nehmen wir an, dass $\zeta = \{(x_i, y_i) | 1 \leq i \leq 3\}$ mit $x_1 < x_2 = x_3$ und $y_2 < y_3$ gilt. Der ζ zugeordnete Baum hat dann die Gestalt aus Abbildung 2.4. Allgemeiner wird einer beliebigen Konfiguration in $C^3(\mathbb{R}^2)$ einer der Bäume aus Abbildung 2.5 zugeordnet.

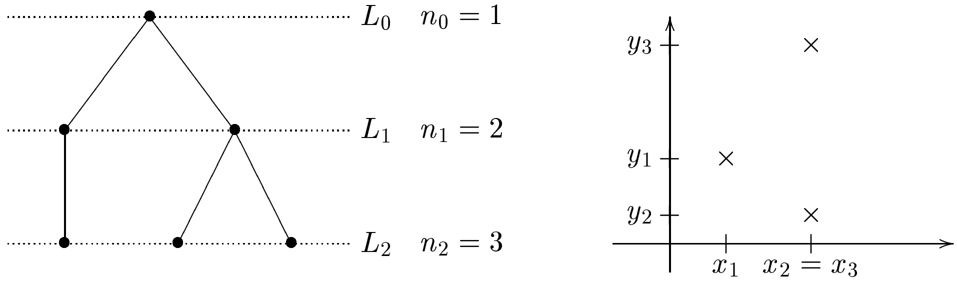

Abbildung 2.4: Links ist der Baum abgebildet, den wir der Konfiguration ζ aus Beispiel 2.4 zuordnen. Rechts ist eine Möglichkeit angegeben, wie ζ in der euklidischen Ebene liegen könnte, was den Zusammenhang zu Fuks' Beschreibung zeigt: ζ liegt in der Zelle $e(1,2)$. Mit obigen Bezeichnungen gilt $n_1 = q$.

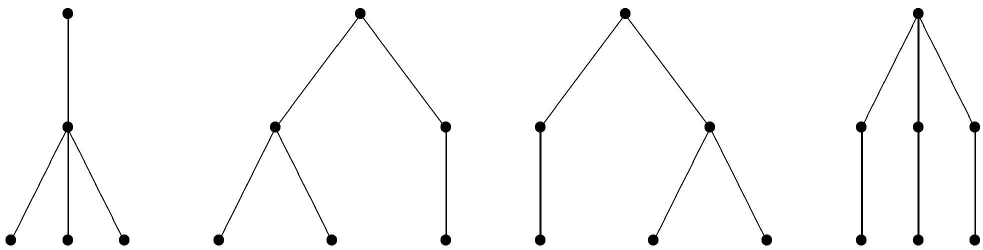

Abbildung 2.5: Die Abbildung zeigt die Zellen positiver Dimension in Fuks' Zerlegung des Raumes $C^3(\mathbb{R}^2)_\infty$, dargestellt durch ihre repräsentierenden Bäume. Hinzu kommt lediglich noch der Punkt ∞ als einzige Nullzelle.

Diese Zuordnung definiert eine Äquivalenzrelation auf $C^n(\mathbb{R}^m)$. Die Äquivalenzklassen $[\zeta]$, also die maximalen Mengen von n-Konfigurationen im $\mathbb{R}^m$, denen derselbe Baum zugeordnet wird wie ζ, sind homöomorph zu $(0;1)^{\sum_{i=1}^m n_i}$ und bilden die Zellen von Vassilievs Zerlegung. Ich bezeichne auch den Baum mit $[\zeta]$, und seine Dimension sei gleich der Dimension einer Zelle, die er repräsentiert, also gleich $\sum_{i=1}^m n_i$. Das ist die Anzahl seiner Kanten. Nach Vassiliev ([Vas88],[Vas92]) erhält man eine CW-Zerlegung von $C^n(\mathbb{R}^m)_\infty$. Ich füge eine triviale Folgerung über die Dimension der Zellen hinzu:

Satz 2.5
Es gibt eine CW-Zerlegung der Einpunkt-Kompaktifizierung $C^n(\mathbb{R}^m)_\infty$, die als einzige Nullzelle den Punkt ∞ enthält. Abgesehen von dieser Nullzelle hat die Zerlegung nur Zellen in den Dimensionen k mit $n + m - 1 \leq k \leq n \cdot m$.

Die Aussage über die Dimensionen der Zellen ist sofort klar, wenn man die sie repräsentierenden Bäume betrachtet. In Abbildung 2.6 sind die Bäume mit minimaler positiver und maximaler Dimension, also Kantenzahl angegeben.

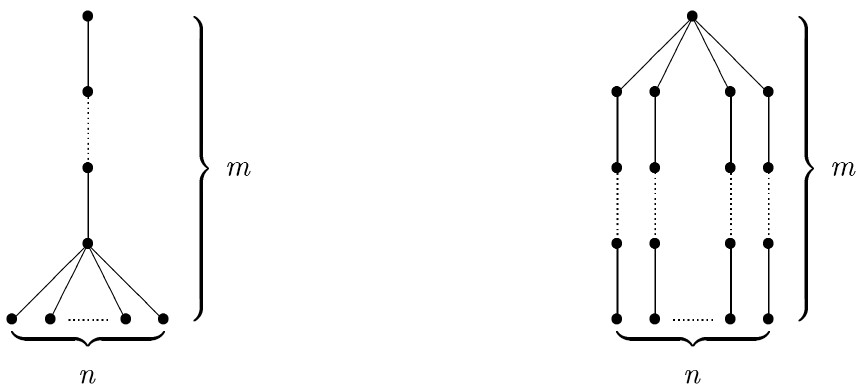

Abbildung 2.6: Vassilievs Zellenzerlegung von $C^n(\mathbb{R}^m)$ hat jeweils genau eine Zelle der Dimension $n+m-1$ und nm. Es gilt Dimension=Kantenzahl. Die Abbildung zeigt die sie repräsentierenden Bäume. Dies sind die Zellen minimaler positiver und maximaler Dimension.

Betrachten wir als nächstes, wie wir die Differentiale in dem zu obiger Zellenzerlegung gehörenden zellulären Kettenkomplex mithilfe von Bäumen beschreiben können. Wie vorhin beschränken wir uns auf Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Im Folgenden sei ein Baum $[\zeta]$ der Dimension l fest gewählt, also ein Baum, der eine l-Zelle repräsentiert.
Weiter seien a, b zwei Ecken in $[\zeta]$, die den folgenden drei Bedingungen genügen:

1. Die Ecken a und b liegen auf derselben Horizontalen L_i, wobei $1 \leq i \leq m-1$.

2. Zwischen a und b liegt keine weitere Ecke.

3. Die Ecken a und b sind durch Kanten mit demselben Punkt auf L_{i-1} verbunden.

Angenommen a ist mit n_a Ecken in L_{i+1} verbunden und b mit n_b. Dann bilden wir wie folgt eine Summe von $\binom{n_a+n_b}{n_a}$ Bäumen der Dimension $l-1$, siehe auch Abb. 2.7. Ausgehend von dem Baum $[\zeta]$ lassen wir die Punkte a und b auf L_i zusammenlaufen und schließlich verschmelzen, mit ihnen die beiden Kanten, die sie mit einem Punkt auf L_{i-1} verbinden. Wir erhalten einen Baum der Dimension $l-1$. Dies ist einer der Summanden. Die weiteren Summanden erhalten wir so: Jede von a oder b nach unten abgehende Kante definiert einen Teilbaum von $[\zeta]$, der neben der Kante auch alles enthält, was unter ihr liegt. Wir erhalten also zwei Familien von Unterbäumen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit n_a bzw. n_b Elementen. Im bereits beschriebenen Summanden finden wir diese Unterbäume in derselben Anordnung von links nach rechts wie in $[\zeta]$. Wir erhalten alle $\binom{n_a+n_b}{n_a}$ Summanden, wenn wir diese Anordnung variieren, nämlich durch shuffeln der beiden Familien von Unterbäumen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.
Die gesamte Randabbildung erhalten wir, wenn wir dieses Vorgehen für jedes

ungeordnete Paar von Ecken a, b, die den obigen drei Bedingungen genügen, wiederholen.

Für festes n und m erhalten wir so einen Kettenkomplex $\mathcal{C}_\bullet(n,m)$ von sogenannten (n,m)-Bäumen, dessen Homologie gleich $\overline{H}_*(C^n(\mathbb{R}^m)_\infty; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ist, denn in positiver Dimension ist dieser Komplex gerade der zelluläre Kettenkomplex mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Koeffizienten zu Vassilievs CW-Zerlegung. Indizieren wir die Kettengruppen dieses Komplexes nicht mit der Dimension der Bäume, sondern mit ihrer Kodimension ($= n \cdot m-$Anzahl der Kanten), so erhalten wir einen Kokettenkomplex, dessen Homologie im Grad q aufgrund des Poincaré-Lefschetz-Isomorphismus

$$H^q(C^n(\mathbb{R}^m); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \overline{H}_{nm-q}(C^n(\mathbb{R}^m)_\infty; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

direkt den Isomorphietyp der Kohomologie $H^q(C^n(\mathbb{R}^m); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ liefert. Eine Version der Poincaré-Lefschetz-Dualität für relative Mannigfaltigkeiten findet man in [Dol72] auf Seite 297. Ich bezeichne diesen neu indizierten Kokettenkomplex als den Kokettenkomplex $\mathcal{C}^\bullet(n,m)$ der (n,m)-Bäume. Man beachte, dass die Parameter n und m so gewählt sind, wie in [Vas88]. In [Vas92] sind sie vertauscht.

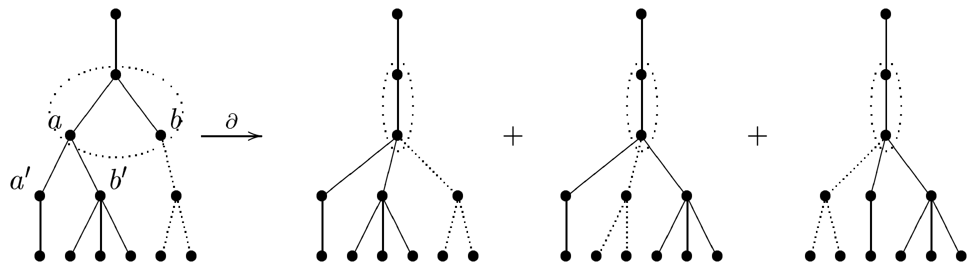

Abbildung 2.7: Die Abbildung soll die Wirkung des Randoperators ∂ im Kokettenkomplex $\mathcal{C}^\bullet(n,m)$ der (n,m)-Bäume verdeutlichen. Im Bild gilt $n = 6$ und $m = 4$. Wir verschmelzen zunächst die Ecken a und b und müssen dann die zugehörigen Familien von Unterbäumen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ miteinander shuffeln. Die Familie $\mathcal{B}$ besteht nur aus einem Element, nämlich dem Teilbaum, der im Bild gepunktet dargestellt ist. $\mathcal{A}$ besteht aus zwei Teilbäumen, sie liegen beide „unter a“: Die Kanten des einen sind genau die an a', die Kanten des anderen sind die an b' anliegenden. Für die vollständige Berechnung des Randes müssen wir noch berücksichtigen, was beim Verschmelzen der Punkte a' und b' passiert, denn auch dieses Punktepaar erfüllt die drei Bedingungen von Seite 30. Die Summanden heben sich aber auf: In diesem Fall entsteht beim Shuffeln viermal der gleiche Baum und wir rechnen modulo 2.

Beispiel 2.6
Wir betrachten die einzige 4*-Zelle in der Zerlegung von* $C^3(\mathbb{R}^2)_\infty$*. Modulo* 2 *ist sie ein Rand, wie Abbildung 2.8 zeigt. Mit dem Poincaré-Lefschetz-Isomorphismus folgt dann* $H^2(C^3(\mathbb{R}^2); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H_4(C^3(\mathbb{R}^2)_\infty; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong 0$.

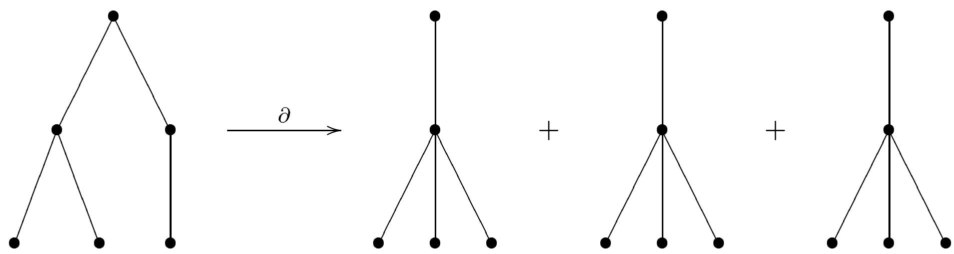

Abbildung 2.8: Ein Beispiel für die Wirkung des Randoperators ∂ im Koketten-komplex $\mathcal{C}^\bullet(3,2)$ der $(3,2)$-Bäume. Weil wir modulo 2 rechnen, ist der dreimal abgebildete Baum ein Rand. Er repräsentiert die einzige 4-Zelle in Vassilievs Zerlegung von $C^3(\mathbb{R}^2)_\infty$. Mit dem Poincaré-Lefschetz-Isomorphismus folgt dann $H^2(C^3(\mathbb{R}^2);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H_4(C^3(\mathbb{R}^2)_\infty;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong 0$.

Im nächsten Abschnitt werde ich Beispiel 2.6 verallgemeinern und aus Vassilievs Zellenzerlegung weitere Folgerungen ableiten.

Zur Randabbildung im Komplex $\mathcal{C}^\bullet(n,m)$ sei noch folgendes bemerkt: Hat ein Baum $[\zeta]$ bereits n Ecken auf der Hilfslinie L_i, so gilt dies auch für alle Bäume in $\partial[\zeta]$. Ein Baum in $\partial[\zeta]$, für den dies nicht gilt, muss nämlich aus $[\zeta]$ durch Verschmelzen zweier Punkte auf L_i entstehen. Aber selbst wenn es ein Punktepaar auf L_i gibt, das den Bedingungen auf Seite 30 genügt, liefert dieses Paar keinen Beitrag zum Rand: Die zwei Familien von Unterbäumen, die wir shuffeln müssen, sind nämlich gleich und haben je ein Element. Also tritt der Baum im Rand mit dem Faktor 2 auf.
Die Menge aller (n,m)-Bäume $[\zeta]$ mit $\pi_k(\zeta) = n > \pi_{k-1}(\zeta)$ bildet deshalb einen Unterkomplex $\mathcal{C}_k^\bullet(n,m)$ von $\mathcal{C}^\bullet(n,m)$ und es gilt ([Vas92], Seite 30):

Satz 2.7
Der Komplex $\mathcal{C}^\bullet(n,m)$ zerfällt in die direkte Summe seiner Unterkomplexe $\mathcal{C}_k^\bullet(n,m)$:

$$\mathcal{C}^\bullet(n,m) = \bigoplus_{k=1}^{m} \mathcal{C}_k^\bullet(n,m)$$

2.4 Zur Kohomologie der ungeordneten Euklidischen Konfigurationsräume

Wir betrachten zunächst die von den Inklusionen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ induzierten Abbildungen $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m) \to \widetilde{C}^n(\mathbb{R}^{m+1})$ und $C^n(\mathbb{R}^m) \to C^n(\mathbb{R}^{m+1})$. Mit den Kolimites $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^\infty) := \operatorname{colim}_{m\to\infty} \widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)$ und $C^n(\mathbb{R}^\infty) := \operatorname{colim}_{m\to\infty} C^n(\mathbb{R}^m)$ erhalten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \Sigma_n \arrow[d] & \Sigma_n \arrow[d] \\ \widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{C}^n(\mathbb{R}^\infty) \simeq * \arrow[d] \\ C^n(\mathbb{R}^m) \arrow[r, "f^n_{m,\infty}"] & C^n(\mathbb{R}^\infty) = K(\Sigma_n, 1) \end{tikzcd}$$

Weil $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^\infty)$ zusammenziehbar ist, ist $C^n(\mathbb{R}^\infty) \cong K(\Sigma_n, 1)$ ein Eilenberg-MacLane-Raum. Wegen Satz 1.18 sind die Bilder der Abbildung

$$C^n(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{f^n_{m,\infty}} C^n(\mathbb{R}^\infty) \cong K(\Sigma_n, 1)$$

unter Kohomologiefunktoren für unsere Zwecke von größtem Interesse. Für die singuläre Kohomologie mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Koeffizienten gilt der folgende Satz:

Satz 2.8 ([Vas92], Seite 27)
Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ ist die von $f^n_{m,\infty}$ induzierte Abbildung

$$H^*(\Sigma_n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(C^n(\mathbb{R}^m); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

surjektiv.

Beweisskizze:
Wir untersuchen zunächst die Abbildungen $(f^n_{m,m+1})^* \colon H^*(C^n(\mathbb{R}^{m+1}); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^*(C^n(\mathbb{R}^m); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ und betrachten einen Stabilisierungsprozess auf der Ebene der Bäume:
Wenn wir einen (n, m)-Baum durch n vertikale Kanten nach unten verlängern, erhalten wir einen $(n, m+1)$-Baum. Dabei bleibt die Kodimension erhalten, und das Verlängern ist wegen Satz 2.7 mit den Randabbildungen verträglich. Wir erhalten deshalb eine Folge von Inklusionen von Kokettenkomplexen $i^n_{m,m+1} : \mathcal{C}^\bullet(n, m) \to \mathcal{C}^\bullet(n, m+1)$, deren Kolimes ich mit $\mathcal{C}^\bullet(n, \infty)$ bezeichne. Zu jeder Inklusion $i^n_{m,m+1}$ gibt es eine Retraktion $r^n_{m,m+1} \colon \mathcal{C}^\bullet(n, m+1) \to \mathcal{C}^\bullet(n, m)$ mit Kern $\mathcal{C}^\bullet_{m+1}(n, m+1)$.

Wir betrachten das folgende Diagramm in dem die vertikalen Isomorphismen von den Definitionen der Komplexe $\mathcal{C}^\bullet$ und $\mathcal{C}_\bullet$, der zellulären Homologie und der Poincaré-Dualität kommen.

$$\begin{tikzcd}
H_q(\mathcal{C}^\bullet(n,m+1)) \arrow[rr, "(r^n_{m,m+1})_*"] \arrow[d, equal] & & H_q(\mathcal{C}^\bullet(n,m)) \arrow[d, equal] \\
H_{n(m+1)-q}(\mathcal{C}_\bullet(n,m+1)) \arrow[d, "\cong"'] & & H_{nm-q}(\mathcal{C}_\bullet(n,m)) \arrow[d, "\cong"] \\
\overline{H}_{n(m+1)-q}(C^n(\mathbb{R}^{m+1})_\infty;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[rr, "(f^n_{m,m+1})_!"] \arrow[d, "\cong"', "PD"] & & \overline{H}_{nm-q}(C^n(\mathbb{R}^m)_\infty;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[d, "PD"', "\cong"] \\
H^q(C^n(\mathbb{R}^{m+1});\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[rr, "(f^n_{m,m+1})^*"] & & H^q(C^n(\mathbb{R}^m);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})
\end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Das untere Rechteck kommutiert nach Definition der Abbildung $(f^n_{m,m+1})_!$. Um sich von der Kommutativität des oberen Rechtecks zu überzeugen beachte man, dass eine Zelle σ von $C^n(\mathbb{R}^m)_\infty$ positiver Dimension vermittels $f^n_{m,m+1}$ durch $\sigma \mapsto \sigma \times \{0\} \subset \sigma \times \mathbb{R}^n \cong \widetilde{\sigma}$ in eine Zelle $\widetilde{\sigma}$ von $C^n(\mathbb{R}^{m+1})_\infty$ eingebettet wird. Für $\infty \geq m' > m$ entspricht die Abbildung $(r^n_{m,m'})_*$ also der Abbildung $(f^n_{m,m'})^*$. Weil $(r^n_{m,m'})_*$ surjektiv ist, ist auch $(f^n_{m,m'})^*$ surjektiv und es folgt

$$\begin{aligned}
H^q(\Sigma_n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &= H^q(\operatorname{colim}_m C^n(\mathbb{R}^m);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\
&\cong \lim_m H^q(C^n(\mathbb{R}^m);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) && [\text{da } (f^n_{m,m+1})^* \text{ surjektiv}] \\
&\cong \lim_m H_q(\mathcal{C}^\bullet(n,m)) && [\text{wegen Diagramm 2.4}] \\
&\cong H_q(\mathcal{C}^\bullet(n,\infty)). && \square
\end{aligned}$$

Gilt eine Surjektivitätsaussage für $H^*(\Sigma_n;R) \to H^*(C^n(\mathbb{R}^m);R)$ wie im letzten Satz, so liefert der Grad jeder Kohomologieklasse wegen Satz 1.18 eine untere Schranke für die Kategorie von $C^n(\mathbb{R}^m)$, siehe Abschnitt 3.3 Seite 41. Wir wollen uns die Kohomologieringe mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Koeffizienten deshalb genauer ansehen und verallgemeinern mit dem nächsten Satz Beispiel 2.6:

Satz 2.9
Es sei k_n die Anzahl der Einsen in der Dualdarstellung von n. Dann gilt

$$H^q(C^n(\mathbb{R}^m);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \begin{cases} = 0 & \textit{falls } q > (n-k_n)\cdot(m-1) \\ \neq 0 & \textit{falls } q = (n-k_n)\cdot(m-1). \end{cases}$$

Mit anderen Worten: Für die kohomologische Dimension von $C^n(\mathbb{R}^m)$ mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Koeffizienten gilt

$$\operatorname{cohdim}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} C^n(\mathbb{R}^m) = (n-k_n)\cdot(m-1).$$

Beweis:
Für $m = 2$ folgt die Aussage aus [Fuk70] §4, Punkt 4.2, mit einem elementaren Beweis auf den Seiten 144f. Für beliebiges $m \geq 2$ folgt die Aussage aus dem Theorem auf Seite 31 von [Vas92]. Vassiliev nutzt für seinen Beweis die Kohomologie $H^q(\Sigma_n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ der symmetrischen Gruppe Σ_n. Der Satz folgt auch aus der Beschreibung von $H^q(C^n(\mathbb{R}^m); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ in der Diplomarbeit von Tymon Tatur [Tat98].
In Theorem A geht von Satz 2.9 nur die Ungleichung $\operatorname{cohdim}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} C^n(\mathbb{R}^m) \geq (n-k_n)\cdot(m-1)$ ein. Im Folgenden zeige ich, dass es ein nichttriviales Element in $H^{(n-k_n)(m-1)}(C^n(\mathbb{R}^m); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ gibt.
Sei zunächst n eine Zweierpotenz. Dann enthält $H^{(n-1)(m-1)}(C^n(\mathbb{R}^m); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ die nichttriviale Klasse, die durch den linken Baum aus Abbildung 2.6 repräsentiert wird. Dies ist der einzige Baum mit maximaler Kodimension $(n-1)(m-1)$. Offensichtlich ist dieser Baum ein Zykel. Er ist kein Rand, denn für alle $1 \leq z \leq n-1 = 2^l - 1$ ist $\binom{2^l}{z}$ ein Vielfaches von 2 und im Rand eines anderen Baumes tritt unser Baum höchstens mit einem dieser Faktoren auf.
Ist n keine Zweierpotenz, so ist der linke Baum aus Abbildung 2.6 wegen $\operatorname{ggT}\{\binom{n}{z} | 1 \leq z \leq n-1\} \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$ ein Rand.
Kein Rand hingegen ist der linke Baum aus Abbildung 2.9. Er hat die Kodimension $mn - (n + (m-1)k_n) = (m-1)\cdot(n-k_n)$, wobei $n = 2^{l_1} + \cdots + 2^{l_{k_n}}$ gilt. Dieser ist allerdings kein Zykel. Wir erhalten jedoch einen Zykel, wenn wir die

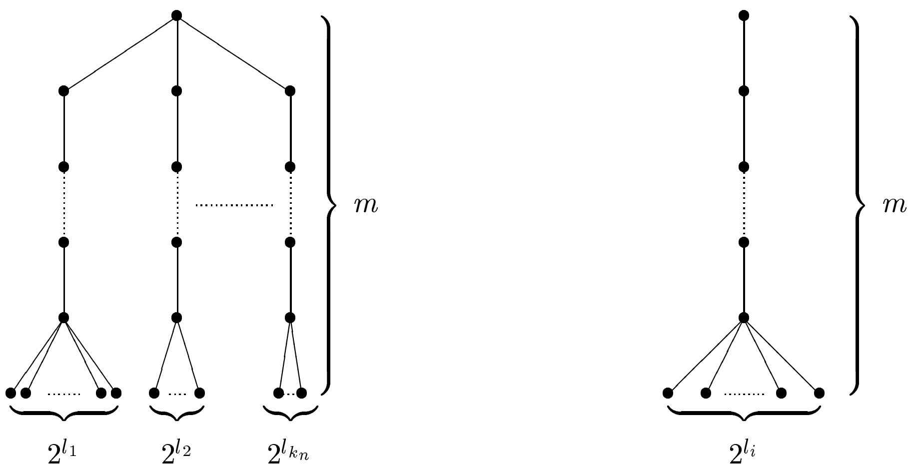

Abbildung 2.9: Die Abbildung soll veranschaulichen, dass es eine nichttriviale Klasse in $H^{(n-k_n)(m-1)}(C^n(\mathbb{R}^m); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ gibt. Links ist ein Summand des repräsentierenden Zykels dargestellt. Die anderen Summanden dieses Zykels erhalten wir aus dem abgebildeten durch Permutation seiner Unterbäume der rechts abgebildeten Gestalt.

Kette betrachten, die aus den $k!$ Bäumen besteht, die aus dem Baum von Abbildung 2.9 durch Permutation der k Unterbäume der rechts angegebenen Gestalt hervorgehen. $\square$

Wegen seiner Bedeutung formuliere noch ein Korollar zum letzten Satz. Es wird zur exakten Bestimmung von $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m))$ für eine Zweierpotenz n beitragen.

Korollar 2.10
Es gilt $H^{(n-1)(m-1)}(C^n(\mathbb{R}^m);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq 0$ *genau dann, wenn* n *eine Zweierpotenz ist.*

Das Korollar wird für eine Zweierpotenz n auf die Ungleichung $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) \geq (n-1)\cdot(m-1)$ führen. Es stellt sich nun die Frage, ob man eine Aussage wie in Korollar 2.10 für weitere Werte von n erhält, wenn man den Koeffizientenring $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ durch andere Koeffizienten ersetzt. Das ist der Fall. Ich vermute aber, dass zur vollständigen Bestimmung von $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m))$ noch andere Ansätze nötig sind. Mehr dazu führe ich in Kapitel 3.4 aus.

Um $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m))$ für weitere Werte von n und m von unten durch den Wert $(n-1)\cdot(m-1)$ beschränken zu können, folgere ich aus der Arbeit von Ossa (siehe [Oss96], Prop. 3.4 und der daran anschließenden Bemerkung für den Fall $p=3$, siehe auch [Coh73] und [CLM76]):

Satz 2.11 (Cohen,Ossa)
Ist p *eine ungerade Primzahl, dann ist*

$$H^{(p-1)(m-1)}(\Sigma_p;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{(p-1)(m-1)}(C^p(\mathbb{R}^m);\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

ein Isomorphismus.

Nach diesen Vorbereitungen können wir mit den Berechnungen von $\mathrm{cat}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m))$ und $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m))$ beginnen.

Kapitel 3

Zur Kategorie Euklidischer Konfigurationsräume

In diesem Kapitel stelle ich zunächst meine Berechnungen von $\mathrm{cat}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m))$ und $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m))$ vor. In Abschnitt 3.4 skizziere ich dann einige weitere Gedanken zur Berechnung der Kategorie euklidischer Konfigurationsräume.

3.1 $\mathrm{cat}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m))$ und $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m))$ für $n \leq 2$ oder $m \leq 2$

Für kleine Werte der Parameter n und m gibt es spezielle Argumente zur Berechnung von $\mathrm{cat}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m))$ und $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m))$. Zudem ist der Raum $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^1)$ nicht zusammenhängend und erfordert deshalb eine besondere Beachtung. Wesentlich in diesem Abschnitt ist darüber hinaus das Überlagerungsargument, mit dem wir $\mathrm{cat}\, C^n(\mathbb{R}^2)$ von unten beschränken. Andere Ergebnisse dieses Abschnitts beweisen wir später in allgemeinerer Form erneut, zum Beispiel Lemma 3.5. Die Idee des hier geführten Beweises wird im Beweis von Lemma 3.11 wieder aufgegriffen.
Wir beginnen mit Berechnungen, wenn der Parameter n klein ist.

Natürlich sind die Räume $\widetilde{C}^1(\mathbb{R}^m)$ und $C^1(\mathbb{R}^m)$ zusammenziehbar, folglich ist ihre Kategorie Null. Für $n = 2$ können wir die Kategorie mit zwei speziellen Argumenten berechnen:

Satz 3.1 *(siehe z.B. [CLM76])*
Ist G eine topologische Gruppe mit neutralem Element e, so gilt

$$\widetilde{C}^n(G) \cong G \times \widetilde{C}^{n-1}(G - \{e\}).$$

Beweis:
Ein Homöomorphismus ist durch $(g_1, \dots, g_n) \mapsto (g_1, (g_2 g_1^{-1}, \dots, g_n g_1^{-1}))$ gegeben. $\square$

Setzen wir $n = 2$ und $G = \mathbb{R}^m$, so erhalten wir $\widetilde{C}^2(\mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^m \times \widetilde{C}^1(\mathbb{R}^m - \{0\}) \simeq \mathbb{S}^{m-1}$ und folglich:

Korollar 3.2
Für alle $m \geq 1$ gilt

$$\mathrm{cat}(\widetilde{C}^2(\mathbb{R}^m)) = 1.$$

Auch die Kategorie der ungeordneten Konfigurationsräume $C^2(\mathbb{R}^m)$ können wir mit einem speziellen Argument angeben:

Satz 3.3 ($n = 2$, ungeordneter Fall)
Für alle $m \geq 1$ gilt

$$\mathrm{cat}(C^2(\mathbb{R}^m)) = m - 1. \tag{3.1}$$

Beweis:
Aufgrund des kommutativen Diagramms von Faserungen

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Sigma_2 \arrow[d] \\
\mathbb{S}^{m-1} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & \widetilde{C}^2(\mathbb{R}^m) \arrow[d] \\
\mathbb{R}P^{m-1} \arrow[r, "\overline{\Phi}"] & C^2(\mathbb{R}^m)
\end{tikzcd}$$

mit der äquivarianten Homotopieäquivalenz $\Phi(x) := (x, -x)$ ist $\overline{\Phi}\colon RP^{m-1} \to C^2(\mathbb{R}^m)$ eine Homotopieäquivalenz zwischen CW-Komplexen (siehe [CLM76]). Also folgt aufgrund der Homotopie-Invarianz der Kategorie und nach Beispiel 1.16 auf Seite 19

$$\mathrm{cat}(C^2(\mathbb{R}^m)) = \mathrm{cat}(\mathbb{R}P^{m-1}) = m - 1.$$

$\square$

Wir wenden uns nun kleinen Werten der Dimension m zu:

Satz 3.4 ($m = 1$)
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathrm{cat}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R})) = n! - 1 \qquad \textit{und} \tag{3.2}$$

$$\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R})) = 0. \tag{3.3}$$

Beweis:
$\widetilde{C}^n(\mathbb{R})$ hat genau $n!$ Zusammenhangs-Komponenten X_σ ($\sigma \in \Sigma_n$), wobei $X_\sigma := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \widetilde{C}^n(\mathbb{R}) | x_{\sigma(1)} < \cdots < x_{\sigma(n)}\}$ offensichtlich zusammenziehbar ist.

Das zeigt $\mathrm{cat}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R})) = n! - 1$. Offensichtlich ist auch, dass $C^n(\mathbb{R})$ zusammenziehbar ist, also gilt $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R})) = 0$. □

Für $m = 2$ wird sich zeigen, dass die Kategorie der geordneten und ungeordneten Konfigurationsräume $\widetilde{C}^n(\mathbb{R})$ und $C^n(\mathbb{R})$ übereinstimmt. Ich beschränke zunächst $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^2))$ von oben. Die Idee der Zerlegung wie sie unten in Gleichung (3.7) auftritt, und damit das Herzstück des Beweises, stammt von Carl-Friedrich Bödigheimer.
Ich werde das folgende Lemma später noch allgemeiner zeigen. Der Beweis ist aber auch für sich interessant, weil ähnliche Argumente in Lemma 3.11 eingehen.

Lemma 3.5
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^2)) \leq n - 1. \tag{3.4}$$

Beweis:
Wir greifen Fuks' Idee seiner Zellenzerlegung auf und bilden zunächst für $1 \leq k \leq n$ die Mengen $V_i \subset C^n(\mathbb{R}^2)$, definiert durch

$$\begin{aligned} V_k &:= \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in C^n(\mathbb{R}^2) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{die } x_i \text{ liegen genau} \\ \text{auf } k \text{ Senkrechten} \end{array} \right\} && (3.5) \\ &= \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in C^n(\mathbb{R}^2) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Ist } x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}), \text{ so gilt} \\ \#\{x_{1,1}, \ldots, x_{n,1}\} = k \end{array} \right\}. && (3.6) \end{aligned}$$

V_k entspricht der Vereinigung aller Zellen der Dimension $n + k$ in Fuks Zellenzerlegung von $C^n(\mathbb{R}^2)_\infty$ und es gilt $C^n(\mathbb{R}^2) = \coprod_{k=1}^n V_k$. Für $k \neq n$ sind die V_k aber nicht offen in $C^n(\mathbb{R}^2)$, also ist $V_1, \ldots, V_n$ *keine* kategorische Überdeckung von $C^n(\mathbb{R}^2)$. Weil die V_k aber Untermannigfaltigkeiten (der Dimension $n + k$) von $C^n(\mathbb{R}^2)$ sind, können wir die Mengen V_k für $1 \leq k \leq n - 1$ zu tubularen Umgebungen $U_k \supset V_k$ vergrößern.

Behauptung:
$U_1, ..., U_{n-1}, U_n := V_n$ ist eine kategorische Überdeckung von $C^n(\mathbb{R}^2)$.

Da sich die Menge U_i nach Konstruktion auf V_i retrahieren lässt und offen ist, reicht es zu zeigen, dass die Mengen V_i zusammenziehbar in $C^n(\mathbb{R}^2)$ sind. Das ist der Fall, denn

$$V_k = \coprod_{(n_1, \ldots, n_k) \dashv n} (C^{n_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times C^{n_k}(\mathbb{R})) \times C^k(\mathbb{R}), \tag{3.7}$$

wobei die Summe über alle geordneten Partitionen $(n_1, \ldots, n_k) \dashv n$ von n der Länge k läuft. Für jede solche Partition ist $C^{n_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times C^{n_k}(\mathbb{R}) \times C^k(\mathbb{R})$

zusammenziehbar, denn jeder der Faktoren ist es nach Satz 3.4. Also ist V_k zusammenziehbar in $C^n(\mathbb{R}^2)$, denn $C^n(\mathbb{R}^2)$ ist wegzusammenhängend. Alternativ sieht man die Zusammenziehbarkeit der Menge V_k auch daran, dass jede Zelle zusammenziehbar und $C^n(\mathbb{R}^2)$ wegzusammenhängend ist. $\square$

Es ist jetzt nicht mehr schwer, den nächsten Satz zu beweisen:

Satz 3.6 ($m = 2$)
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\operatorname{cat}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^2)) = \operatorname{cat}(C^n(\mathbb{R}^2)) = n - 1. \tag{3.8}$$

Beweis:
Ich zeige die folgende Kette von Relationen:

$$n - 1 = \operatorname{cup}_{\mathbb{Z}}(\widetilde{C}(\mathbb{R}^2)) \leq \operatorname{cat}(\widetilde{C}(\mathbb{R}^2)) \leq \operatorname{cat}(C^n(\mathbb{R}^2)) \leq n - 1. \tag{3.9}$$

Die erste Gleichung ist Folgerung 2.2 (Seite 24). Die erste Ungleichung gilt, weil wir die Kategorie von unten durch die cup-Länge abschätzen können (Satz 1.15 Seite 19). Die zweite Ungleichung folgt daraus, dass $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m) \to C^n(\mathbb{R}^m)$ eine Überlagerung ist (Satz 1.4, Seite 10), und $\operatorname{cat}(C^n(\mathbb{R}^2)) \leq n - 1$ haben wir im letzten Lemma gezeigt. $\square$

3.2 $\operatorname{cat}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m))$

Wir beweisen in diesem Abschnitt

Theorem A
Für alle $m \geq 2$, also sobald der Konfigurationsraum $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)$ zusammenhängend ist, gilt

$$\operatorname{cat}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)) = n - 1.$$

Der Raum $\widetilde{C}^n(\mathbb{R})$ besteht aus $n!$ zusammenziehbaren Komponenten, also gilt $\operatorname{cat}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R})) = n! - 1$.

Beweis:
Die Aussagen für $m \leq 2$ habe ich bereits im letzten Abschnitt bewiesen. Wir können also $m \geq 3$ annehmen. Es gilt $\operatorname{cat}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)) \geq \operatorname{cup}_{\mathbb{Z}}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)) \geq n - 1$ nach Folgerung 2.2 (Seite 24), wie im Fall $m = 2$. Um auch $\operatorname{cat}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)) \leq n-1$ zu zeigen, benutzen wir, dass es einen zu $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)$ homotopieäquivalenten CW-Komplex Y der Dimension $(n-1)(m-1)$ gibt, der $(m-2)$-zusammenhängend ist (Satz 2.3). Aus Satz 1.13 und der Homotopie-Invarianz folgt dann $\operatorname{cat}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)) = \operatorname{cat}(Y) \leq \frac{\dim(Y)}{m-1} = \frac{(n-1)(m-1)}{m-1} = n - 1$. $\square$

Damit ist $\operatorname{cat}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m))$ vollständig bestimmt.

3.3 $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m))$

In diesem Abschnitt soll das Hauptresultat der Arbeit, Theorem B, bewiesen werden:

Theorem B
Es sei k_n die Anzahl der Einsen in der Dualdarstellung von n. Dann gilt

$$(n-k_n)\cdot(m-1) \leq \mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) \leq (n-1)\cdot(m-1). \tag{3.10}$$

Falls (i) n eine Zweierpotenz oder $n = 3$
oder (ii) n eine Primzahl und m ungerade
oder (iii) $m \leq 2$ ist,
so gilt

$$\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) = (n-1)\cdot(m-1). \tag{3.11}$$

Ist $n = p$ eine Primzahl und m gerade, so gilt

$$\mathrm{cat}(C^p(\mathbb{R}^m)) \geq (p-1)\cdot(m-2). \tag{3.12}$$

Die Gültigkeit von Gleichung (3.11) für $m \leq 2$ folgt aus den Ergebnissen von Abschnitt 3.1. Alle anderen Aussagen sind eine Zusammenfassung der folgenden Lemmata und Sätze.

Ich beschränke $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m))$ zunächst von oben und verallgemeinere damit Lemma 3.5:

Lemma 3.7
Für alle n und m gilt

$$\mathrm{cat}(C^n(R^m)) \leq (n-1)\cdot(m-1). \tag{3.13}$$

Beweis:
Ohne Einschränkung sei $m \geq 2$. Wir verwenden Vassilievs CW-Zerlegung der Einpunkt-Kompaktifizierung $X := C^n(R^m)_\infty$ von $C^n(R^m)$ (siehe Abschnitt 2.3, Seite 28ff). Diese hat nach Satz 2.5 außer der 0-Zelle ∞ nur Zellen in den Dimensionen k mit $n+m-1 \leq k \leq nm$. Weil $C^n(R^m) = X - \infty = X - X^{(n+m-2)}$ zusammenhängend ist, können wir Satz 1.14 anwenden und wir erhalten $\mathrm{cat}(C^n(R^m)) = \mathrm{cat}(X - X^{(n+m-2)}) \leq \dim(X) - (n+m-1) = nm - (n+m-1) = (n-1)\cdot(m-1)$. □

Wir wenden uns nun den unteren Schranken für $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m))$ zu. Einen Weg, wie man hier untere Schranken finden kann, habe ich bereits in Abschnitt 2.4 vorbereitet und skizziert. Ich fasse das Vorgehen zusammen:

Mit den offensichtlichen Abbildungen haben wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_n \arrow[d] & \Sigma_n \arrow[d] \\
\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{C}^n(\mathbb{R}^\infty) \simeq * \arrow[d] \\
C^n(\mathbb{R}^m) \arrow[r, "f"] & C^n(\mathbb{R}^\infty) = K(\Sigma_n, 1)
\end{tikzcd}$$

Weil $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^\infty)$ zusammenziehbar ist, ist $C^n(\mathbb{R}^\infty)$ ein $K(\Sigma_n,1)$-Raum. Wir wählen eine nichttriviale Kohomologieklasse $u \in H^k(C^n(\mathbb{R}^\infty);R) = H^k(K(\Sigma_n,1);R) = H^k(\Sigma_n;R)$. Weil u eine Klasse in der Kohomologie eines Eilenberg-MacLane-Raumes ist, hat u nach Satz 1.18.3 das Gewicht k. Nun betrachten wir die Klasse $f^*(u) \in H^k(C^n(\mathbb{R}^m);R)$. Gilt $f^*(u) \neq 0$, so hat $f^*(u)$ nach Satz 1.18.4 mindestens das Gewicht k, da das Gewicht beim Zurückziehen nicht kleiner werden kann, wenn das Bild nicht Null ist. Schließlich gilt dann auch $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) \geq k$, weil die Kategorie durch das Gewicht von $f^*(u)$ von unten beschränkt wird.

Dieses Vorgehen wollen wir jetzt mit den Resultaten aus Kapitel 2.4 über die Kohomologie ungeordneter euklidischer Konfigurationsräume kombinieren. Weil die Abbildung $f^* : H^*(\Sigma_n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^*(C^n(\mathbb{R}^m);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ stets surjektiv ist (Satz 2.8, Seite 33), und weil $\mathrm{cohdim}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(C^n(\mathbb{R}^m)) = (n-k_n)\cdot(m-1)$ gilt, wobei k_n die Anzahl der Einsen in der Dualdarstellung von n ist (Satz 2.9, Seite 34), folgt:

Satz 3.8
Ist k_n die Anzahl der Einsen in der Dualdarstellung von n, so gilt

$$\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) \geq (n-k_n)(m-1). \tag{3.14}$$

Korollar 3.9
Ist n eine Zweierpotenz, so gilt

$$\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) = (n-1)(m-1). \tag{3.15}$$

Analog dazu behandeln wir den Fall, dass $n = p \geq 3$ und m ungerade ist. Wir verwenden, dass $f^* : H^{(p-1)(m-1)}(\Sigma_p;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^{(p-1)(m-1)}(C^p(\mathbb{R}^m);\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ein Isomorphismus ist (Satz 2.11 auf Seite 36), und die Kohomologie der symmetrischen Gruppe $H^*(\Sigma_p;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[\alpha]\otimes\Lambda_p(\beta)$. Hierbei ist α ein polynomialer Erzeuger im Grad $2(p-1)$ und β ein äußerer Erzeuger im Grad $2(p-1)-1$. Also ist $H^{(p-1)(m-1)}(\Sigma_p;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \neq 0$. Daraus folgt direkt die erste Aussage im folgenden Satz.

Satz 3.10
Ist m ungerade, und $p \geq 3$ eine Primzahl, so gilt $\mathrm{cat}(C^p(\mathbb{R}^m)) \geq (p-1)(m-1)$.
Ist m gerade, und $p \geq 3$ eine Primzahl, so gilt $\mathrm{cat}(C^p(\mathbb{R}^m)) \geq (p-1)(m-2)$.

Die zweite Aussage folgt aus der ersten, weil die Abbildung $f^*\colon H^*(\Sigma_p;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^*(C^p(\mathbb{R}^{m-1});\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ über $H^*(C^p(\mathbb{R}^m);\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ faktorisiert. □

Für $p = 3$ kann ich die Schranke für gerade m verbessern.

Lemma 3.11
Für alle m gilt

$$\mathrm{cat}(C^3(\mathbb{R}^{m+1})) \leq \mathrm{cat}(C^3(\mathbb{R}^m)) + 2. \tag{3.16}$$

Beweis:
Ich zerlege $C^3(\mathbb{R}^{m+1})$ ähnlich wie $C^n(\mathbb{R}^2)$ im Beweis von Lemma 3.5 in Untermannigfaltigkeiten $C^3(\mathbb{R}^{m+1}) = \coprod_{k=1}^3 V_k(\mathbb{R}^{m+1})$, wobei $V_k(\mathbb{R}^{m+1})$ jetzt die Menge aller 3-Konfigurationen ist, deren Bild bei senkrechter Projektion auf die Hyperebene $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ aus genau k Punkten besteht. Wegen $V_1(\mathbb{R}^{m+1}) = \mathbb{R}^m \times C^3(\mathbb{R})$ ist klar, dass $V_1(\mathbb{R}^{m+1})$ zusammenziehbar ist. Die Menge $V_2(\mathbb{R}^{m+1}) = C^1(\mathbb{R}) \times C^2(\mathbb{R}) \times \widetilde{C}^2(\mathbb{R}^m)$ ist es auch, weil wir die zwei Bildpunkte in unserer Hyperebene unterscheiden können: Der eine hat zwei Urbilder, der andere nur eines. Es gilt zwar $\mathrm{cat}(\widetilde{C}^2(\mathbb{R}^m)) = 1$, aber in $\widetilde{C}^2(\mathbb{R}^{m+1})$ ist $\widetilde{C}^2(\mathbb{R}^m)$ zusammenziehbar, weil die 2-Konfigurationen geordnet sind und wir die zweite zunächst in eine Hyperebene parallel zu $\mathbb{R}^m$ verschieben können.
Weiter gilt $\mathrm{cat}_{C^3(\mathbb{R}^{m+1})}(V_3(\mathbb{R}^{m+1})) \leq \mathrm{cat}(C^3(\mathbb{R}^m))$, da $V_3(\mathbb{R}^{m+1}) \subset C^3(\mathbb{R}^{m+1})$ offen und retrahierbar auf $C^3(\mathbb{R}^m)$ ist. Gehen wir für V_1 und V_2 wie im Beweis von Lemma 3.5 zu tubularen Umgebungen U_1 und U_2 über, so sehen wir, dass $\mathrm{cat}(C^3(\mathbb{R}^{m+1})) = \mathrm{cat}(\coprod_{k=1}^3 V_k(\mathbb{R}^{m+1})) = \mathrm{cat}_{C^3(\mathbb{R}^{m+1})}(U_1 \cup U_2 \cup V_3) \leq \mathrm{cat}_{C^3(\mathbb{R}^{m+1})}(V_3) + \mathrm{cat}_{C^3(\mathbb{R}^{m+1})}(U_2) + \mathrm{cat}_{C^3(\mathbb{R}^{m+1})}(U_1) + 2 \leq \mathrm{cat}(C^3(\mathbb{R}^m)) + 2$ gilt. □

Korollar 3.12
Für alle $m \geq 1$ gilt

$$\mathrm{cat}(C^3(\mathbb{R}^m)) = 2(m-1). \tag{3.17}$$

Beweis:
Als obere Schranke erhalten wir diesen Wert wie immer aufgrund von Lemma 3.7. Dass dies auch eine untere Schranke ist, folgt für ungerade m bereits aus Satz 3.10. Dann gilt es aufgrund des letzten Lemmas aber auch für gerade m. □

Damit ist der Beweis von Theorem B vollständig.

3.4 Anschließende Fragen und weitere Ideen

In allen Fällen, in denen ich $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m))$ genau bestimmen konnte, gilt

$$\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) = (n-1)\cdot(m-1).$$

Deshalb stellt sich die folgende Frage:

Frage 1
Gilt $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) = (n-1)\cdot(m-1)$ *für alle* $n, m \in \mathbb{N}$*?*

Und stärker:

Frage 2
Kann $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) = (n-1)\cdot(m-1)$ *für alle* $n, m \in \mathbb{N}$ *dadurch gezeigt werden, dass man ein Koeffizientensystem* R *und eine Kohomologieklasse in* $H^{(n-1)(m-1)}(C^n(\mathbb{R}^m); R)$ *findet, die von* $H^{(n-1)(m-1)}(\Sigma_n; R)$ *kommt, also das* R*-Gewicht* $(n-1)(m-1)$ *hat?*

Vieles spricht dafür, dass man auf diesem Weg noch bessere untere Schranken finden kann. Vassiliev hat zum Beispiel bewiesen, dass für ungerade m auch die offensichtliche Abbildung $H^*(\Sigma_n; \mathbb{Z}) \to H^*(C^n(\mathbb{R}^m); \mathbb{Z})$ surjektiv ist ([Vas92], Theorem 4.3, Seite 35). Ich bezweifle aber, dass $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m))$ so vollständig bestimmt werden kann. Um diesen Zweifel zu untermauern, führe ich den Begriff der Schnittkategorie secat einer Faserung ein.

3.4.1 Schnittkategorie

Definition 3.13 (secat)
Für eine Faserung $\pi\colon E \to B$ *sei die Schnittkategorie* $\mathrm{secat}(\pi)$ *die kleinste Zahl* n*, sodass es eine offene Überdeckung* $U_0, \ldots, U_n$ *der Basis* B *und lokale Schnitte* $s_i\colon U_i \to E$ *zu* π *gibt.*

Aufgrund der Homotopie-Hochhebungs-Eigenschaft von π gilt $\mathrm{secat}(\pi) \leq \mathrm{cat}(B)$. Mehr zur Schnittkategorie findet man in [CLOT03], ab Seite 259. In der Literatur gibt es nach [Šva58] auch die Bezeichnung „genus“, später „Švarc genus“, abgekürzt g. Mit unserer Definition gilt $\mathrm{secat}(\pi) = g(\pi) - 1$.

Da $f^n_{m,\infty} : C^n(\mathbb{R}^m) \to K(\Sigma_n, 1)$ eine klassifizierende Abbildung für die Faserung $\pi^n_m\colon \widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m) \to C^n(\mathbb{R}^m)$ ist, gilt nach [CLOT03], Satz 8.22 (S.242f) und Satz 9.18 (S.261)

$$\mathrm{secat}(\pi^n_m) \geq \mathrm{wgt}(u)$$

für jede Kohomologieklasse $u \in H^*(K(\Sigma_n, 1); R)$ mit $f^*(u) \neq 0$. Unsere untere Schranke für $cat(C^n(\mathbb{R}^m))$ aus Satz 3.8 ist also auch eine untere Schranke für die Schnittkategorie $\mathrm{secat}(\pi^n_m)$. Wir können jetzt eine dritte Frage formulieren.

Frage 3
Gilt $\operatorname{secat}(\pi_m^n) = (n-1)\cdot(m-1)$ *für alle* $n, m \in \mathbb{N}$*?*

Ist $m = 2$, so steht diese Frage in engem Zusammenhang mit der Komplexität bestimmter Algorithmen ([Sma87], siehe auch Abschnitt 4.3). Sie stößt deshalb auf reges Interesse ([DeCPS04],[Aro05]). Vassiliev hat in seinen Arbeiten gezeigt, dass $\operatorname{secat}(\pi_2^n) = (n-1)$ gilt, wenn n eine Primzahlpotenz ist. Für das kleinste n, für welches dies nicht der Fall ist, $n = 6$, haben De Concini, Procesi und Salvetti folgendes gezeigt:

Satz 3.14 ([DeCPS04])
Es gilt

$$\operatorname{secat}(\pi_2^6) = 4 < 5 = \operatorname{cat}(C^6(\mathbb{R}^2)).$$

Wir können Frage 3, und somit auch Frage 2, also mit Nein beantworten. Dennoch bleibt es interessant, für welche n und m die Ungleichung $\operatorname{secat}(\pi_m^n) = (n-1)\cdot(m-1)$ gilt. Im Fall $m = 2$ gibt es dazu ein Preprint vom Mai dieses Jahres von Gregory Arone.

Satz 3.15 ([Aro05])
Wenn n *weder eine Primzahlpotenz noch das zweifache einer Primzahlpotenz ist, dann gilt* $\operatorname{secat}(\pi_2^n) < n - 1$.

Für $n \neq 2p^k$ weiß man also, ob $\operatorname{secat}(\pi_2^n) = (n-1)$ gilt. Arone gibt auch Antworten für gewisse n mit $n = 2p^k$. Für beliebige p und k ist diese Frage aber weiterhin offen, ebenso wie in vielen Fällen die genaue Bestimmung der Schnittkategorie $\operatorname{secat}(\pi_m^n)$. Weil die offensichtliche Abbildung $f : C^n(\mathbb{R}^m) \to C^n(\mathbb{R}^\infty)$ eine klassifizierende Abbildung ist, folgt mit den Propositionen 9.18 und 8.22(2) aus [CLOT03] sowie dem Beweis von Theorem B, dass viele der gefundenen Schranken für $\operatorname{cat}(C^n(\mathbb{R}^m))$ auch Schranken für $\operatorname{secat}(\pi_m^n)$ sind. Wir erhalten zum Beispiel den folgenden Satz:

Satz 3.16
Ist n *eine Zweierpotenz oder eine Primzahl und* m *ungerade, so gilt* $\operatorname{secat}(\pi_m^n) = (n-1)\cdot(m-1)$.

Merkwürdigerweise hat sich anscheinend noch niemand mit der Schnittkategorie der Faserungen π_m^n für $m > 2$ befasst. Es wäre äußerst interessant herauszufinden, ob sich mit dem Vorgehen aus [DeCPS04] auch für $m > 2$ weitere Informationen gewinnen lassen.

3.4.2 Überlagerungen

Im letzten Unterabschnitt haben wir gesehen, dass wir $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^2))$ mit der Schnittkategorie der Faserung π_2^n im Allgemeinen nicht optimal von unten beschränken können.
Die vollständige Berechnung von $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^2))$ erfolgte mithilfe des Überlagerungsarguments

$$\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^2)) \geq \mathrm{cat}(\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^2)) \geq n-1.$$

Frage 4
Können wir Überlagerungen $X \to C^n((R^m))$ finden, die wegen $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) \geq \mathrm{cat}(X)$ bessere untere Schranken für $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m))$ liefern?

Stefan Schwede hat mir vorgeschlagen, für X den Quotienten $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)\big/\operatorname{Syl}_p(\Sigma_n)$ von $\widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)$ mit einer p-Sylow-Untergruppe zu wählen. Diese Räume treten auch bei Fred Cohens Berechnungen von $H^*(C^p(\mathbb{R}^m);\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ auf. Stets muss man dann untere Schranken für die Kategorie von X finden. Offensichtliche gute untere Schranken habe ich nicht gesehen. Ich gebe weitere Beispiele für Räume, die man für X wählen kann: Für $n = n_1 + \cdots + n_l$ definieren wir

$$\begin{aligned} C^{n_1,\dots,n_l}(\mathbb{R}^m) &:= \widetilde{C}^n(\mathbb{R}^m)\Big/\Sigma_{n_1}\times\cdots\times\Sigma_{n_l} \\ &= \{(\zeta_1,\dots,\zeta_l) \in C^{n_1}(\mathbb{R}^m)\times\cdots\times C^{n_l}(\mathbb{R}^m) \,\big|\, \zeta_i \cap \zeta_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j\}. \end{aligned}$$

Es gilt:

Satz 3.17
Ist $n = n_1 + \cdots + n_l$, dann gilt

$$\mathrm{cat}\left(C^n(\mathbb{R}^m)\right) \geq \mathrm{cat}\left(C^{n_1,\cdots,n_l}(\mathbb{R}^m)\right) \geq \mathrm{cat}\left(C^{n_1}(\mathbb{R}^m)\times\cdots\times C^{n_l}(\mathbb{R}^m)\right).$$

Ich vermute, dass zumindest dann, wenn die n_i alle Potenzen der gleichen Primzahl sind, relativ gute untere Schranken für $\mathrm{cat}\left(C^{n_1}(\mathbb{R}^m)\times\cdots\times C^{n_l}(\mathbb{R}^m)\right)$ ermittelt werden können.

Beweis von Satz 3.17:
Wir betrachten das folgende Diagramm, indem i die Inklusion ist und π die l paarweise disjunkten Konfigurationen zu einer n-Konfiguration vereinigt:

$$\begin{tikzcd}
& C^{n_1,\dots,n_l}(\mathbb{R}^m) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "i"] & \\
C^n(\mathbb{R}^m) & & C^{n_1}(\mathbb{R}^m)\times\cdots\times C^{n_l}(\mathbb{R}^m) \arrow[ul, dashed, "s"]
\end{tikzcd}$$

Die erste Ungleichung folgt, da π eine Überlagerung ist. Zum Beweis der zweiten Ungleichung reicht es nach Satz 1.4.1 zu zeigen, dass $C^{n_1}\times\cdots\times C^{n_l}(\mathbb{R}^m)$

von $C^{n_1,\dots,n_l}(\mathbb{R}^m)$ dominiert wird, also dass es einen Homotopieschnitt s zur Inklusion i gibt. Ich konstruiere einen solchen wie folgt: Wir fixieren einen Vektor $e_1 \in \mathbb{R}^m$ mit Norm 1. Für $X \subset \mathbb{R}^m$ und $r \in \mathbb{R}$ definiere ich $T_r(X)$ durch

$$T_r(X) := \{y \in \mathbb{R}^m | \exists x \in X : y = x + r \cdot e_1\} = X + r \cdot e_1.$$

Der Homotopieschnitt s soll von der Form

$$s(\zeta_1, \dots, \zeta_l) := \big(\zeta_1, T_{r_2}(\zeta_2), T_{r_3}(\zeta_3), \dots, T_{r_l}(\zeta_l)\big)$$

sein. Wenn die Differenzen $r_i - r_{i-1}$ genügend groß sind, so ist s eine Abbildung nach $C^{n_1,\dots,n_l}(\mathbb{R}^m)$. Es ist klar, dass die r_i in stetiger Abhängigkeit von $(\zeta_1, \dots, \zeta_l)$ so gewählt werden können, dass $r_i - r_{i-1}$ genügend groß ist, denn jedes ζ_i ist eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}^m$. Zu zeigen bleibt, dass $i \circ s \simeq id$ gilt. Wegen $i \circ s = (T_0, T_{r_2}, \dots, T_{r_l})$ und $T_{r_i} \simeq T_0 = id$ ist das aber offensichtlich. □

3.4.3 Geometrische Überlegungen

Im Folgenden will ich weitere Ansätze auflisten, wie man versuchen könnte, die Ungleichung $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) \geq (n-1) \cdot (m-1)$ für alle n und m zu beweisen.

Mit der oberen Schranke aus Theorem B würde es genügen, eine der folgenden Ungleichungen zu beweisen:

$$\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^{m+1})) \geq \mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) + (n-1) \tag{3.18}$$

$$\mathrm{cat}(C^{n+1}(\mathbb{R}^m)) \geq \mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) + (m-1) \tag{3.19}$$

Weil wir nach Theorem B beliebig große n kennen, für die $\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) = (n-1) \cdot (m-1)$ gilt, wäre es auch ausreichend,

$$\mathrm{cat}(C^{n+1}(\mathbb{R}^m)) \leq \mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) + (m-1) \tag{3.20}$$

zu zeigen. Das ist mir nicht gelungen. Es gibt aber ein kleines Ergebnis, das mit Ungleichung (3.19) zu tun hat. Wir erhalten es als Korollar zu Satz 3.17 mit der Zerlegung $n = n_1 + n_2 := (n-1) + 1$.

Korollar 3.18
Es gilt

$$\mathrm{cat}(C^n(\mathbb{R}^m)) \geq \mathrm{cat}(C^{n-1}(\mathbb{R}^m)).$$

Das Korollar liefert für gewisse Werte von n und m eine Verbesserung von Theorem B. Für ungerades m gilt zum Beispiel

$$\mathrm{cat}(C^{14}(\mathbb{R}^m)) \geq \mathrm{cat}(C^{13}(\mathbb{R}^m)) = 12 \cdot (m-1).$$

Mit Theorem B erhalten wir als unteren Schranke lediglich

$$\mathrm{cat}(C^{14}(\mathbb{R}^m)) = \mathrm{cat}(C^{8+4+2}(\mathbb{R}^m)) \geq 11 \cdot (m-1).$$

Ich gebe noch einen direkten Beweis von Korollar 3.18. Dieser lässt sich leicht verallgemeinern, um zum Beispiel $\operatorname{cat} C^n(M) \geq \operatorname{cat} C^{n-1}(M)$ für eine beliebige Mannigfaltigkeit mit Rand zu zeigen, denn auch in diesem Fall kann ein Homotopieschnitt s wie im folgenden Beweis konstruiert werden.

Direkter Beweis von Korollar 3.18:
Sei $C^{n-1,1}(M) = \{(\zeta, x_n) \in C^{n-1}(M) \times M | x_n \notin \zeta\}$ wie oben. Ist M hausdorffsch, so haben wir eine n-fache Überlagerung $\pi : C^{n-1,1}(M) \to C^n(M)$. Also gilt dann $\operatorname{cat}(C^n(M)) \geq \operatorname{cat}(C^{n-1,1}(M))$. Weiter gibt es eine Projektion $pr : C^{n-1,1}(M) \to C^{n-1}(M)$, die (ζ, x_n) auf ζ abbildet.

$$\begin{tikzcd} & C^{n-1,1}(M) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, shift left, "pr"] & \\ C^n(M) & & C^{n-1}(M) \arrow[ul, dashed, shift left, "s"] \end{tikzcd}$$

Ist $M = \mathbb{R}^m$, so gibt es zu pr einen Schnitt s, zum Beispiel die Abbildung $\zeta \mapsto (\zeta, (1 + \max_{x \in \zeta} ||x||) \cdot e_1)$, wobei $e_1 \in \mathbb{R}^m$ ein beliebiger fester Vektor mit Norm 1 ist. Also wird $C^{n-1}(\mathbb{R}^m)$ von $C^{n-1,1}(\mathbb{R}^m)$ dominiert. Mit Satz 1.4.1 folgt $\operatorname{cat}(C^{n-1,1}(\mathbb{R}^m)) \geq \operatorname{cat}(C^{n-1}(\mathbb{R}^m))$, was den Beweis vollendet. $\square$

Wenn man sich die Beweise von Satz 1.4.1 und 1.4.3 in Erinnerung ruft, dann sieht man, dass mit den Bezeichnungen aus dem letzten Beweis das Urbild einer kategorischen Überdeckung unter $\pi \circ s$ wieder eine kategorische Überdeckung liefert. Ungleichung (3.19) könnte man also beweisen, indem man zu einer kategorischen Überdeckung von $C^{n+1}(\mathbb{R}^m)$ minimaler Länge einen Schnitt s findet, sodass das Urbild der Überdeckung unter $\pi \circ s$ eine m-Überdeckung von $C^n(\mathbb{R}^m)$ ist, siehe Abschnitt 1.6, Seite 20. Es stellt sich natürlich die Frage, wie gut man die gewählte Überdeckung dafür schon kennen muss, und ob dann nicht auch eine direkte Berechnung der Kategorie möglich ist.

Umgekehrt kann man sich fragen, ob man aus einer kategorischen m-Überdeckungen von $C^n(\mathbb{R}^m)$ eine kategorische 1-Überdeckung von $C^{n+1}(\mathbb{R}^m)$ derselben Länge konstruieren kann. Das würde wegen (Satz 1.20) Gleichung (3.20) beweisen.

3.4.4 Berechnung à la Berstein

Daniel Tanré hat mir vorgeschlagen, Frage 1 auf demselben Weg zu entscheiden, wie Berstein die Kategorie der Grassmann-Mannigfaltigkeiten $G_{n,k}(\mathbb{R})$ untersucht hat ([Ber76]). Der anzuwendende Satz (auch Theorem 2.51 in [CLOT03], Seite 67) setzt aber voraus, dass $C^n(\mathbb{R}^m)$ homotopieäquivalent zu einem $(n-1) \cdot (m-1)$-dimensionalen CW-Komplex ist. Ich weiß nicht, ob diese Voraussetzung erfüllt ist.

Kapitel 4

Motivationen und mögliche Anwendungen

In den folgenden Unterkapiteln skizziere ich Anwendungen, in denen die Lusternik-Schnirelmann-Kategorie von Konfigurationsräumen eine Rolle spielt.

4.1 Kategorie und Zerlegungen von Räumen

Ein allgemeines Vorgehen, mit dem man Zerlegungen von gewissen Räumen erhalten kann, wurde in [Böd85] beschrieben. Um das Ergebnis zu formulieren, führe ich Konfigurationsräume mit Labels ein. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $M_0 \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit, und X ein zusammenhängender CW-Komplex mit Grundpunkt $*$. Wir definieren

$$\mathcal{C} := C(M, M_0; X) := \coprod_{k=0}^{\infty} \widetilde{C}^k(M) \times_{\Sigma_k} X^k /\!\sim \,, \tag{4.1}$$

$$\mathcal{C}_n := C_n(M, M_0; X) := \coprod_{k=0}^{n} \widetilde{C}^k(M) \times_{\Sigma_k} X^k /\!\sim \,, \tag{4.2}$$

wobei $\sim$ durch

1. $[z_1, \ldots, z_k; x_1, \ldots, x_k] = [z_1, \ldots, \hat{z}_i, \ldots, z_k; x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_k]$, falls $z_i \in M_0$ und
2. $[z_1, \ldots, z_k; x_1, \ldots, x_k] = [z_1, \ldots, \hat{z}_i, \ldots, z_k; x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_k]$, falls $x_i = *$ der Grundpunkt ist,

erzeugt wird. Wir schreiben auch $C(M; X)$ für $C(M, \emptyset; X)$. Der Raum $C(\mathbb{R}^1; X)$ ist homotopieäquivalent zu James Konstruktion $J(X) \simeq \Omega\Sigma X$, und allgemeiner gibt es Homotopieäquivalenzen

$$\gamma^m \colon C(\mathbb{R}^m; X) \longrightarrow \Omega^m \Sigma^m X \tag{4.3}$$

$$\gamma^\infty \colon C(\mathbb{R}^\infty; X) \longrightarrow \Omega^\infty \Sigma^\infty X \tag{4.4}$$

(siehe z.B. [Böd85], Example 13). Die Filtrierungsquotienten des Raumes $\mathcal{C}$ bezeichnen wir mit

$$\mathcal{D}_n := D_n(M, M_0; X) := \mathcal{C}_n/\mathcal{C}_{n-1}.$$

Jetzt können wir eine stabile Zerlegung angeben. Es gilt (siehe z.B. [Böd85]):

$$\Sigma^\infty \mathcal{C} = \Sigma^\infty C(M, M_0; X) \simeq \Sigma^\infty \bigvee_{n=1}^{\infty} D_n(M, M_0; X) = \Sigma^\infty \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n. \tag{4.5}$$

Setzen wir $(M, M_0) = (\mathbb{R}^m, \emptyset)$, so erhalten wir Snaiths stabile Zerlegung von $\Omega^m\Sigma^m X$.

Im Beweis von (4.5) wird eine Abbildung $\Phi^\infty\colon \mathcal{C} \to C(\mathbb{R}^\infty, \bigvee D_n)$ konstruiert, sodass eine stabile Äquivalenz $\Sigma^\infty\mathcal{C} \to \Sigma^\infty \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$ durch die adjungierte Abbildung zu $\Phi^\infty \circ \gamma^\infty\colon \mathcal{C} \to C(\mathbb{R}^\infty, \bigvee D_n) \simeq \Omega^\infty\Sigma^\infty \bigvee D_n$ gegeben ist. Könnte man eine Abbildung $\Phi^m\colon \mathcal{C} \to C(\mathbb{R}^m, \bigvee D_n)$ analog zur Abbildung $\Phi^\infty\colon \mathcal{C} \to C(\mathbb{R}^\infty, \bigvee D_n)$ konstruieren, so würde man mit (4.3) entsprechend eine unstabile Zerlegung $\Sigma^m\mathcal{C} \to \Sigma^m \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$ erhalten.
Der Konstruktion der Abbildung Φ^∞ liegen Einbettungen $C^n(M) \to \mathbb{R}^\infty$ zugrunde. Wir betrachten jetzt gewisse fasernweise Einbettungsprobleme:

Es sei $\pi\colon \widetilde{Y} \to Y$ eine Überlagerung und $L \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ minimal, sodass eine Einbettung $\widetilde{Y} \hookrightarrow Y \times \mathbb{R}^L$ existiert, mit der das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{Y} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"'] & Y \times \mathbb{R}^L \arrow[dl, "pr_1"] \\
Y &
\end{tikzcd}$$

Ist Y parakompakt, so gilt

$$L \leq \mathrm{cat}(Y) + 1.$$

Spezieller betrachten wir jetzt für eine Mannigfaltigkeit Y die folgende Situation:

$$\begin{tikzcd}
C^{n_1,n_2}(Y) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"'] & C^n(Y) \times \mathbb{R}^{L(Y,n_1,n_2)} \arrow[dl, "pr_1"] \\
C^n(Y) &
\end{tikzcd} \tag{4.6}$$

Dabei ist $C^{n_1,n_2}(Y) := \{(\zeta_1, \zeta_2) \in C^{n_1}(Y) \times C^{n_2}(Y) | \zeta_1 \cap \zeta_2 = \emptyset\}$, wie in Abschnitt 3.4.2, $n = n_1 + n_2$ und π vereinigt disjunkte Teilkonfigurationen. Für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ wählen wir jetzt $L(Y, n_1, n_2)$ wie in (4.6) minimal und definieren

$$L(Y) := \sup_{n_1,n_2} L(Y, n_1, n_2).$$

Um den Zusammenhang zu Zerlegungen von Räumen herzustellen, setzen wir $Y = M$.

Carl-Friedrich Bödigheimer hofft, dass man eine Abbildung konstruieren kann, die folgende Zerlegung liefert:

$$\Sigma^{L(M)} C(M;X) \overset{?}{\simeq} \Sigma^{L(M)} \bigvee_{j=1}^{\infty} D_j(M;X).$$

Wir geben zwei Beispiele:

1. (*James*) Es sei $M = \mathbb{R}^1$. Dann gilt

$$L(\mathbb{R}^1) = \sup_{n_1,n_2} L(\mathbb{R}^1, n_1, n_2) \leq \sup_n \operatorname{cat}(C^n(\mathbb{R}^1)) + 1 = 1$$

und

$$\Sigma C(\mathbb{R}, X) \simeq \Sigma \bigvee_{n=1}^{\infty} D_n(\mathbb{R}, X),$$

was nichts anderes ist, als die James-Zerlegung

$$\Sigma J(X) \simeq \Sigma\Omega\Sigma X \simeq \Sigma \bigvee_{n=1}^{\infty} D_n(\mathbb{R}, X).$$

2. (*vermutet*) Es sei $M = \mathbb{S}^1$. Wegen $C^n(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{S}^1$ gilt dann

$$L(\mathbb{S}^1) = \sup_{n_1,n_2} L(\mathbb{S}^1, n_1, n_2) \leq \sup_n \operatorname{cat}(C^n(\mathbb{S}^1)) + 1 = \sup_n \operatorname{cat}(\mathbb{S}^1) + 1 = 2$$

und

$$\Sigma^2 C(\mathbb{S}^1, X) \overset{?}{\simeq} \Sigma^2 \bigvee_{j=1}^{\infty} D_j(\mathbb{S}^1, X).$$

In diesem Zusammenhang ist es natürlich von Interesse, ob es weitere zusammenhängende Mannigfaltigkeiten M mit $L(M) < \infty$ gibt. Herr Bödigheimer vermutet, dass es neben $M = \mathbb{S}^1$ und $M = \mathbb{R}^1$ keine weiteren gibt. Diese Arbeit stützt die Vermutung, dass es keine Mannigfaltigkeit M der Dimension $\dim(M) \geq 2$ gibt, für die $\sup_n \operatorname{cat} C^n(M)$ endlich ist. Für $M = \mathbb{R}^m$ mit $m \geq 2$ folgt $\sup_n \operatorname{cat} C^n(M) = \infty$ aus Theorem B.
Im Fall $L(M) = \infty$ kann man immer noch versuchen, für gewisse $\widetilde{L}(M,k)$ unstabile Zerlegungen $\Sigma^{\widetilde{L}(M,k)} C_k(M;X) \overset{?}{\simeq} \Sigma^{\widetilde{L}(M,k)} \bigvee_{j=1}^{k} D_j(M;X)$ zu erhalten.

4.2 Kategorie und Spektralsequenzen

Ginsburg hat gezeigt, dass die Konvergenz der Moore-Spektralsequen in bestimmten Fällen mit der Lusternik-Schnirelmann-Kategorie zu tun hat (siehe [Gin63],[Gan67], [Too74]). Ist z.B. X ein einfach zusammenhängender, punktierter CW-Komplex, dann gilt für

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}^{H_*(\Omega X, \mathbb{F}_p)}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \Rightarrow H_*(X, \mathbb{F}_p)$$

1. $d^r = 0 \quad$ für $r \geq \mathrm{cat}(X) + 1$
2. $E^\infty_{p,q} = 0 \quad$ für $p \geq \mathrm{cat}(X) + 1$.

Der Raum X kann natürlich auch ein Konfigurationsraum sein. Eine Version dieser Aussagen für Sullivan-Algebren findet sich in [FHT01]. Ich danke Fred Cohen für den Hinweis auf diesen Zusammenhang und Miguel Xicoténcatl für seine Erklärungen.

4.3 Kategorie und die Komplexität von Algorithmen

Wir kehren wieder zu den euklidischen Konfigurationsräumen zurück und beschränken uns auf den Fall $m = 2$. Es gilt

$$C^n(\mathbb{R}^2) \cong \left\{ \begin{array}{c} \text{normierte komplexe Polynome vom Grad } n \\ \text{ohne mehrfache Nullstellen} \end{array} \right\}$$

und wie immer sei $\pi^n_2 : \widetilde{C}^n(\mathbb{R}^2) \to C^n(\mathbb{R}^2)$ die offensichtliche Überlagerung. Sei $\tau(n, \epsilon)$ die Komplexität eines Algorithmus, der die Nullstellen eines Polynoms mit Genauigkeit ϵ berechnet. Nach Smale ([Sma87], siehe auch [CLOT03], [Vas92]) gilt

$$\tau(n, \epsilon) \geq \mathrm{secat}(\pi^n_2),$$

und da $f^n_{2,\infty} : C^n(\mathbb{R}^2) \to K(\Sigma_n, 1)$ eine klassifizierende Abbildung war, gilt nach [CLOT03], Proposition 9.18 und 8.22 auch

$$\mathrm{secat}(\pi^n_2) \geq \mathrm{wgt}(u)$$

für jede Kohomologieklasse $u \in H^*(K(\Sigma_n, 1); R)$ mit $(f^n_{2,\infty})^*(u) \neq 0$. Unsere untere Schranke aus Satz 3.8 ist also auch eine untere Schranke für $\mathrm{secat}(\pi^n_2)$, also auch für $\tau(n, \epsilon)$. Diese und weitere untere Schranken für $\tau(n, \epsilon)$ gehen auf Vassiliev zurück (siehe [Vas88],[Vas92]).

Literaturverzeichnis

[Aro05] Arone, Gregory: A note on the homology of Σ_n, the Schwartz genus, and solving polynomial equations. math.AT/0505388, 10 pages.

[Arn70] Arnold, V. I.: Certain topological invariants of algebrac functions. (Russian) Trudy Moskov. Mat. Obšč. 21 (1970), 27–46.

[Ber76] Berstein, Israel: On the Lusternik-Schnirelmann category of Grassmannians. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 79 (1976), no. 1, 129–134.

[Böd85] Bödigheimer, C.-F.: Stable splittings of mapping spaces. Algebraic Topology. Proc. Seattle (1985). Springer Lecture Notes in Math. 1286, 174–187.

[Coh73] Cohen, Fred: Cohomology of braid spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 763–766.

[Coh95] Cohen, Fred: On configuration spaces, their homology, and Lie algebras. J. Pure Appl. Algebra 100 (1995), no. 1-3, 19–42.

[CLM76] Cohen, Fred; Lada, Thomas J.; May, J. Peter: The homology of iterated loop spaces. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 533. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[CT78] Cohen, Fred; Taylor, L. R.: Computations of Gelfand-Fuks cohomology, the cohomology of function spaces, and the cohomology of configuration spaces. Geometric applications of homotopy theory (Proc. Conf., Evanston, Ill., 1977), I, pp. 106–143, Lecture Notes in Math., 657, Springer, Berlin, 1978.

[CLOT03] Cornea, Octav; Lupton, Gregory; Oprea, John; Tanré, Daniel: Lusternik-Schnirelmann category. Mathematical Surveys and Monographs, 103. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xviii+330 pp.

[DeCPS04] De Concini, C.; Procesi, C.; Salvetti, M.: On the equation of degree 6. Comment. Math. Helv. 79 (2004), no. 3, 605–617.

[Dol72] Dold, Albrecht: Lectures on algebraic topology. Reprint of the 1972 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. xii+377 pp.

[Dor98] Doeraene, Jean-Paul: Homotopy pull backs, homotopy push outs and joins. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 5 (1998), no. 1, 15–37. Auch online unter http://math.univ-lille1.fr/ doeraene/ erhältlich.

[FH01] Fadell, Edward R.; Husseini, Sufian Y.: Geometry and topology of configuration spaces. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. xvi+313 pp.

[FN62] Fadell, Edward; Neuwirth, Lee: Configuration spaces. Math. Scand. 10 (1962), 111-118.

[FHT01] Félix, Yves; Halperin, Stephen; Thomas, Jean-Claude: Rational homotopy theory. Graduate Texts in Mathematics, 205. Springer-Verlag, New York, 2001. xxxiv+535 pp.

[Fox41] Fox, Ralph H.: On the Lusternik-Schnirelmann category. Ann. of Math. (2) 42, (1941), 333–370.

[Fuk70] Fuks, D. B.: Cohomology of the braid group mod2. (Russian) Funkcional. Anal. i Priložen. 4, 1970 no. 2, 62–73. Englische Übersetzung in Funct. Anal. Appl. 4 (1970) S.143-151.

[Gan65] Ganea, Tudor: A generalization of the homology and homotopy suspension. Comment. Math. Helv. 39 (1965), 295–322.

[Gan67] Ganea, Tudor: Lusternik-Schnirelmann category and strong category. Illinois J. Math. 11 1967 417–427.

[Gan71] Ganea, Tudor: Some problems on numerical homotopy invariants. Symposium on Algebraic Topology (Battelle Seattle Res. Center, Seattle Wash., 1971), pp. 23–30. Lecture Notes in Math., Vol. 249, Springer, Berlin, 1971.

[Gin63] Ginsburg, Michael: On the Lusternik-Schnirelmann category. Ann. of Math. (2) 77 1963, 538–551.

[Har71a] Hardie, K. A.: Note on smash functors. J. London Math. Soc. (2) 3 (1971), 93–95.

[Har71b] Hardie, K. A.: On $\operatorname{cat}^i X$. J. London Math. Soc. (2) 3 (1971), 91–92.

[Hat02] Hatcher, Allen: Algebraic topology. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. xii+544 pp.

[Iwa98] Iwase, Norio: Ganea's conjecture on Lusternik-Schnirelmann category. Bull. London Math. Soc. 30 (1998), no. 6, 623–634.

[LS34] Lusternik, L.; Schnirelmann, L.: Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels. Hermann, Paris, 1934.

[Oss96] Ossa, Erich: On the cohomology of configuration spaces. Algebraic topology: new trends in localization and periodicity (Sant Feliu de Guíxols, 1994), 353–361, Progr. Math., 136, Birkhäuser, Basel, 1996.

[Sel97] Selick, Paul: Introduction to homotopy theory. Fields Institute Monographs, 9. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. xxii+188 pp.

[Sma87] Smale, Steve: On the topology of algorithms. I. J. Complexity 3 (1987), no. 2, 81–89.

[Šva58] Švarc, A. S.: The genus of a fiber space. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 119 (1958), 219–222.

[SZ94] Stöcker, Ralph; Zieschang, Heiner: Algebraische Topologie. Eine Einführung. Second edition. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, 1994. xii+485 pp.

[Tat98] Tatur, Tymon: Die Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ des ungeordneten Konfigurationsraumes einer Mannigfaltigkeit. Diplomarbeit, Bonn, 1998.

[Too74] Toomer, Graham Hilton: Lusternik-Schnirelmann category and the Moore spectral sequence. Math. Z. 138 (1974), 123–143.

[Vai78] Vaĭnšteĭn, F. V.: The cohomology of braid groups. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 12 (1978), no. 2, 72–73. English translation in: Functional Anal. Appl. 12 (1978), no. 2, 135–137.

[Vas88] Vassiliev, V. A.: Cohomology of braid groups and the complexity of algorithms. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 22 (1988), no. 3, 15–24, 96; translation in Funct. Anal. Appl. 22 (1988), no. 3, 182–190 (1989).

[Vas92] Vassiliev, V. A.: Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications. Translated from the Russian by B. Goldfarb. Translations of Mathematical Monographs, 98. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992. vi+208 pp.

[Whi54] Whitehead, George W.: On mappings into group-like spaces. Comment. Math. Helv. 28, (1954), 320–328.

[Whi56] Whitehead, George W.: The homology suspension. In: Colloque de topologie algébrique, Louvain, 1956 pp. 89–95. Georges Thone, Liège; Masson & Cie, Paris

[Whi78] Whitehead, George W.: Elements of homotopy theory. Graduate Texts in Mathematics, 61. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978. xxi+744 pp.

Ehrenwörtliche Erklärung:

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne unerlaubte Hilfe Dritter angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Bonn, den 1. Juli 2005

Fridolin Roth